PIKOMAT, 15. ročník šk. rok 1997/98

Vzorové riešenia 2. série letnej časti

1.úloha

Najprv sa pozrime na nôžky stonožtičke. Po piaty pár nôh robí vždy krok s jedným párom. Od šiesteho po desiaty robí krok naraz dvomi pármi (1. a 6., 2.a 7., 3. a 8., 4. a 9., 5. a 10.). Teda kým urobí krok 10.párom, spraví 5 + 2.4 = 13 krokov (5 krokov po 1 páre a potom 4 kroky po dvoch pároch). Ďaľší krok bude už desiatym, teda posledným párom.

U stonožky to bude podobné, po desiaty pár pôjde rovnako ako stonožtička. Keď bude mať urobiť krok 11.párom, naraz urobí krok 1., 6., 11. párom, teda tri kroky. Podobne keď pôjde 16.párom, urobí naraz 4 kroky: 1., 6., 11. a 16. párom. Takto v každej načatej pätici kráča jedným párom naviac. Nakoniec, keď bude robiť 46-ty až 50-tý krok, zdvihne sa naraz 10 párov nôh. Spolu teda spraví toľkoto krokov (aj s pädesiatym párom):

(1.5 + 2.5 + 3.5 + ... + 9.5 + 10.5) = 5. (1 + 2 + 3 + ... + 9 + 10) = 5.11.5 = 275

My chceme spočítať, koľko krokov urobí dovtedy, než sa jej pohne posledný pár - keď urobí krok posledný pár, spolu s ním ho urobí ďaľších 9 - musíme teda odčítať 1 + 9 = 10 krokov. Tak získame počet krokov, ktoré urobí stonožka, než spraví krok aj posledným párom: 275 - 10 = **265**.

2.úloha

Uvedomme si, že stačí zistiť, či sa dajú zaplatiť sumy v hodnote 1, 2, 3, 4, 5 peľozrniek. Všetky ostatné totiž získame tak, že len priplatíme nejaký násobok 5-peľovej mince k sume 1, 2, 3, 4 alebo 5 (napr. sumu 9 peľozrniek získame tak, že zaplatíme sumu 4 peľozrnká a k nej len pridáme 5-peľozrnkovú mincu - každé číslo sa dá písať v jednom z tvarov 5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4). Teraz teda k sumám 1, 2, 3, 4 a 5 peľozrniek:

1 =	3.5 - 2.7	(zaplatíme tromi 5-peľovými zrnkami, vydajú nám dve 7-peľozrnká)
2 =	1.7 - 1.5	(zaplatíme jednou 7-peľozrnkovou mincou, vydajú nám jednu 7-peľozrnkovú mincu)
3 =	2.5 - 1.7	atď.
4 =	2.7 - 2.5	
5 =	5	

Presvedčili sme sa teda, že mincami 5 a 7 peľozrniek sa dá zaplatiť akákoľvek suma.

Prejdime k druhej časti úlohy. Nech dve mince sú x-peľozrnkové a y-peľozrnkové. Ďalej označme hľadanú sumu písmenom s. Ak sa danými mincami má zaplatiť hocijaká suma, tak pre akúkoľvek sumu musíme nájsť také dve celé čísla p,q (môžu byť aj záporné - to keď vydávame), že matematicky musí platiť: s = p.x + q.y.

Na to, aby sme zistili, či sa dá zaplatiť každá hodnota, stačí však zistiť, či sa dá zaplatiť 1 peľozrnko. Akákoľvek iná hodnota sa dá zaplatiť ako jej násobok. (Často sa bude dať zaplatiť aj jednoduchším spôsobom, na ktorý stačí oveľa menej mincí, ale to teraz nie je dôležité.)

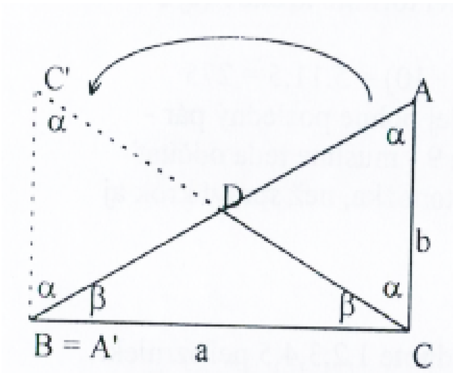
Kedy sa dá zaplatiť 1 peľozrnko? Vtedy, keď sú hodnoty mincí nesúdeliteľné (to znamená, že ich najväčší spoločný deliteľ je 1). Keby totiž mali mince nejakého spoločného deliteľa (väčšieho ako 1), označme ho N, potom nech skombinujeme mince akokoľvek, vždy dostaneme násobok N, (čo jednotka nebude).

3.úloha

Táto úloha bola trochu iná ako ostatné a preto aj vzorové riešenie bude trochu iné. Hlavolam je hlavolamom preto, aby sa na ňom lámali hlavy. A preto vám ešte neprezradím ako sa dajú obdĺžniky poskladať. Celý hlavolam by tým stratil svoje čaro. Riešenia vám pošleme spolu s výsledkami poslednej série na samostatnom papieri, aby ste si ich mohli odložiť bez toho, aby ste zistili, ako sa to dá robiť (ak nebudete od zúfalstva uvažovať o skákaní z mosta.)

4.úloha

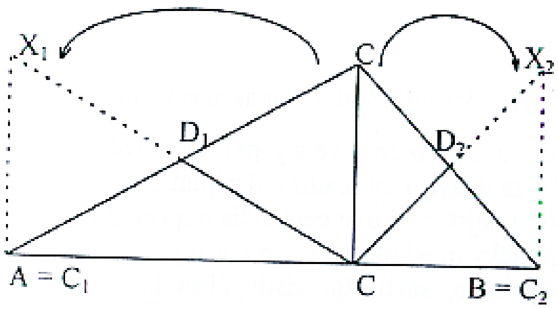
Najprv si ukážeme, že každý pravouhlý trojuholník sa dá rozstrihnúť na dve časti tak, že sa z nich dá zostrojiť jeho zrkadlový obraz. Majme teda pravouhlý trojuholník - rozdeľme ho na dva rovnoramenné trojuholníky tak, ako je to na obrázku. Postup je jednoduchý: z vrchola C vedieme priamku, ktorá so stranou a zviera uhol β. Jej priesečník so stranou c bude bod D (D bude presne v polovici AB).



Oba vzniknuté trojuholníky sú skutočne rovnoramenné, pretože oba majú dva zo svojich vnútorných uhlov zhodné (to že ĐACD = α je zrejmé: Pre súčet uhlov v ΔABC platí: $\alpha + \beta + 90 = 180$. Z toho plynie, že $\alpha + \beta = 90$. A uhol pri vrchole C je pravý, teda 90).

Zrkadlovo otočený trojuholník k ΔABC získame tak, že ΔADC budeme otáčať okolo bodu D v smere šípky dovtedy, kým bod A splynie s bodom B. Toto je teda postup pre každý pravouhlý trojuholník.

Že by sa niečo podobné dalo využiť aj vo všeobecnom trojuholníku? No, to je ľahké - každý trojuholník si predsa vieme rozdeliť na dva pravouhlé trojuholníky - stačí ak z nejakého vrchola vedieme výšku na protiľahlú stranu. No a teraz je to už úplne jednoduché. Tieto dva pravouhlé trojuholníky rozstrihneme podľa vyššie uvedeného návodu na rovnoramenné a zostrojíme dva zrkadlové pravouhlé trojuholníky. Tie potom už len šikovne zošijeme ("podľa výšky"). Postup je najlepšie jasný z obrázka.



Ku každému trojuholníku sa dá teda už na tri rozstrihnutia (pri pravouhlom na jedno, pri rovnoramennom a rovnostrannom netreba strihať vôbec) zostrojiť zrkadlový trojuholník - práve preto, že rovnoramenné trojuholníky sú sami sebe zrkadlové.

5.úloha

Tu vám ukážem hneď dva prístupy k riešeniu takejto úlohy. Jeden je optimistický (podľa Moniky Steinovej) a druhý pesimistický (podľa Katky Quittnerovej). Obidva sú správne. Rozdiel je v tom, že optimistickým postupom sa snažíš objaviť správne písmeno a pesimistickým nájdeš všetky nesprávne a ostane správne. Poďme na to:

1.šifra - optimistický prístup

BALUT	2
BALET	2
BAMET	2
SAMET	2
FLUOR	2
PRUSY	2
FIKUS	1

Napíšme si slová pod seba a pozrime sa najskôr na 4., 5. a 6. slovo, spolu je v nich 6 písmen správne, takže jedno z nich musí byť v dvoch slovách - jediné také je U na 3. mieste.

Keď si teraz priberieme aj 7. slovo a zrušíme 3. stĺpec. Dostávame 4 pozície xx_xx a na nich 2 + 1 + 1 + 1 = 5 správnych písmen, opäť iba jedno písmeno sa opakuje a je to F na prvom mieste. Takže máme FxUxx. Tereaz sa pozrime na prvé 4 slová: z A,U,E a T sú správne 2 a ľahko nahliadneme, že to nemôže byť U ani E. Takže sú to A a T. Máme FAUxT a stačí doplniť S zo slova PRUSY. Šifra je FAUST.

2.šifra - pesimistický prístup

RYBKA (3), KOŠÍK (1), MACKO (2), MYDLO (2), ZAJKO (1), KOCKA (2)

Ak by bolo na 1. mieste Z (zo slova zajko), neboli by správne písmená .A.KO, potom by zo slova MACKO muselo byť správne M a C (čo je však spor - M a Z na 1. mieste). Teda Z na 1. mieste nie je. Rovnako nemôže byť J na 3. mieste.

RYBKA (3), KOŠÍK (1), MACKO (2), MYDLO (2), ~~Z~~A~~J~~KO (1), KOCKA (2)

Ak by bolo na 1. mieste R, tiež dostaneme spor: (na 1. mieste by nebolo K ani M; zo slova MACKO by muselo byť správne C, lebo z .A.KO, je len jedno správne (ZAJKO), takže na 3. mieste by nebolo D, Š ani B; z RYBKA by muselo byť aspoň jedno z ...KA správne, tekže z KOCKA by bolo O nesprávne a spätne do RYBKA (z ...KA je správne len jedno) na správnom mieste je Y; teda na 2. mieste nie je nič iné a z KOŠÍK musí byť správne jedno z ...Í., ...K a z MYDLO musí byť správne jedno z ...L., ...O, ale musí tam byť jedno z ...KA, čo je ten spor. Takže R na 1. mieste nie je.

~~R~~YBKA (3), KOŠÍK (1), MACKO (2), MYDLO (2), ~~Z~~A~~J~~KO (1), KOCKA (2)

Keby bolo O na 2. mieste, nemohlo by tam byť Y, a teda z RYBKA by bolo správne ..BKA. Potom by však z K OCKA boli správne 3 písmena, čo je spor, teda O na 2. mieste nie je. Podobne nie je ani C na 3. mieste.

~~R~~YBKA (3), K ~~O~~ŠÍK (1), MA~~C~~KO (2), MYDLO (2), ~~Z~~A~~J~~KO (1), K~~OC~~KA (2)

Potom musí byť z MACKO na 1. mieste M, lebo z .A.KO je správne len jedno (viď ZAJKO). Keď je prvé M, nie je prvé K a preto z KOCKA je správne ...KA.

~~R~~YBKA (3), ~~KOŠÍK~~ (1), MA~~C~~K~~O~~ (2), MYD~~LO~~ (2), ~~Z~~A~~J~~K~~O~~ (1), ~~KOC~~KA (2)

Teraz už stačí len podopĺňať Š z KOŠÍK a Y z RYBKA a MYDLO. Šifra je MYŠKA.