PIKOMAT, 15. ročník šk. rok 1997/98

Zadania 1. série zimnej časti

Bol raz jeden bod. Bol veľmi zvedavý a chcel všetko vedieť. Len čo uvidel neznámu čiaru, hneď sa musel spýtať: "Ako sa volá táto čiara? Je dlhá alebo krátka?"

Povedal si raz bod: "Ako sa len všetko dozviem, ak stále budem žiť na jednom mieste? Mal by som sa vybrať na vandrovku!" Ako povedal, tak aj urobil. Vyliezol na priamku a poď ho po tej priamke. Išiel, išiel po priamke, veľmi dlho išiel, a konca nikde. Keď už bol na smrť unavený, podkol sa, spadol a skotúľal sa z tej priamky na rovinu. A keďže rovina nebola prázdna a bod mal dnes smoliarsky deň, narazil akurát do iného bodu. To by ešte nebolo to najhoršie, lenže to nebol obyčajný bod , ale sám bod C - vrchol trojuholníka ABC, a teda aj vrchol uhla ACB z už spomenutého trojuholníka. Náš bod sa o tento vrchol riadne udrel a bolestivo spískol:

"Juj, aký si ostrý!"

"Nie som až taký ostrý," bránil sa vrchol C. "možno som dokonca tupý."

"Podľa mňa si riadne ostrý chlapík." nedal sa bod. "Veď sa pozri na svoje ramená!"

Vrchol C odpovedal: "Ja to celkom neviem posúdiť, aký som ostrý, Ja viem len to, že som jeden z troch vrcholov patriacich trojuholníku ABC. Ale bod M, priesečník výšok tohto trojuholníka, vie určite viacej. Povráva sa (ale to môžu byť skutočne len povery), že sa nachádza niekde v strede, teda moju situáciu vidí lepšie. Ak chceš, choď za ním."

Keďže bod bol skutočne zvedavý, rozhodol sa, že aj napriek únave vyhľadá bod M. Pobehal skoro celé vnútro trojuholníka, ba aj von vyzrel, kým sa mu podarilo nájsť bod M. Ten ochotne hovoril:

"Ja toho neviem až tak veľa. O uhloch už vôbec nie. Ale naisto viem, že ja som od vrchola C vzdialený presne toľko, ako sú od seba vzdialené body A a B."

Náš bod posmutnel. "Ako z tohto možno zistiť veľkosť uhla ACB?" pýtal sa sám seba.

1. príklad

Zistite veľkosť uhla ACB.

Keďže bod nebol len zvedavý, ale aj múdry, podarilo sa mu nakoniec vypočítať, o aký uhol sa buchol. Bod M to uveličilo, až sa mu zdôveril:

"Poznám jeden bod, volá sa K a je vrcholom trojuholníka IJK. Tento bod K je veľký chválenkár. Stále sa vyťahuje, že jeho trojuholník nie je obyčajný, ale Pytagorovský, a preto má zvláštnu vlastnosť. Obsah takéhoto trojuholníka je deliteľný číslom 3. Ja vôbec neviem, či mu mám veriť."

Náš bod bol v tejto oblasti ako doma, pretože sám bol pôvodne vnútorným bodom jedného Pytagorovského trojuholníka. Vysvetľoval:

"Bodu K môžeš veriť. Pytagorovský trojuholník je pravouhlý trojuholník, ktorého dĺžky všetkých strán sú celé čísla. Takýto trojuholník má skutočne zvláštnu vlastnosť..." Bod podrobne vysvetľoval všetko, čomu bod M nerozumel.

2. príklad

Dokážte, že obsah Pytagorovského trojuholníka je celé číslo a navyše je deliteľné tromi.

Keď bod dohovoril, bol už taký unavený, že si musel oddýchnuť. Usadil sa na jednu z výšok trojuholníka ABC a zaspal. Spal tak tvrdo, že sen, ktorý sa mu snival, považoval za skutočnosť. Bol to namáhavý sen. Snívalo sa mu, že behá po schodoch. (Uznajte, môže si niekto pri takom sne oddýchnuť?) Schodov bolo 10. Bod vedel ísť po schodoch po jednom, po dvoch a po troch. Bod musel vyjsť nahor po schodoch všetkými spôsobmi. Nadol už mohol ísť hocijako.

3. príklad

Koľkokrát bod vybehol nahor? (Teda koľkými rôznymi spôsobmi vie bod vyjsť na 10 schodov, ak vie chodiť po jednom, po dvoch a po troch?)

Keď bod dobehal po schodoch, začal sa mu snívať iný sen. Naháňala ho guma, ktorá ho chcela zgumovať a on musel utekať na koniec papiera. Vedel, koľko krokov musí ubehnúť, aby sa dostal na koniec papiera. Je to najmenšie šesťciferné číslo s navzájom rôznymi ciframi, ktoré je deliteľné číslom 72 a v jeho dekadickom zápise sa nevyskytujú číslice 0,8,9.

4. príklad

Koľko krokov musí bod prebehnúť?

Bod síce vedel, koľko krokov musel ubehnúť, ale guma bola rýchlejšia. Už už ho doháňala, no koniec papiera bol ďaleko. Gume chýbal len jeden krôčik, aby bod dohnala a vygumovala, ale ten sa našťastie prebudil. Aby predišiel ďalším podobným snom, rozhodol sa, že pôjde ďalej. Rozlúčil sa s bodom M a vybral sa v smere výšky na stranu *b* trojuholníka ABC.

Neprešiel ani 1234567890 krokov, keď narazil na čudné kliky-háky. Vyzerali takto:

$$\frac{1}{p+x}+\frac{1}{p+y}+2=\frac{1+2\mathrm{p}}{p}$$

“Kto ste?” spýtal sa bod.

“Ja som premenná *x* a toto je premenná *y*,” povedala premenná *x*. Obidve nadobúdame hodnoty z množiny prirodzených čísel.

“A ja som parameter *p*,” predstavil sa parameter *p*. “Som dokonca prvočíslo,” hrdo dodal.

“Máme problém,” povedala premenná *y*.“ Nevieme, či nadobúdame nejaké hodnoty vzhľadom na parameter *p*, aby bola rovnosť splnená. Možno ani v skutočnosti neexistujeme,” smutne hovorila aj za premennú *x*.

“Toto by som možno vedel zistiť,” povedal bod. Zamyslel sa, no po čase zistil, že sám to nezvládne a zavolal si na pomoc priateľku ceruzku. Niečo si spolu šepkali, potom ceruzka písala, zasa si šepkali a onedlho stálo na papieri riešenie.

5. príklad

Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel [*x*,*y*], ktoré vyhovujú hornému vzťahu vzhľadom na dané prvočíslo *p*.

Premenné *x* a *y* boli veľmi hrdé na to, aké majú pekné riešenia. Dali sa s bodom do reči. Pýtali sa, odkiaľ je, kam ide a všeličo iné. Keď vyčerpali všetky otázky, parameter *p* sa nesmelo opýtal:

“Bod, ako sa voláš?”

Bod povedal: “Volám sa ...”

6. príklad (nepovinný)

Čo odpovedal bod? (Inými slovami, vymyslite nejaké meno pre náš bod. Fantázii sa medze nekladú. Originalita je vítaná.)

(pokračovanie)

Riešenia príkladov 1. série nám pošlite najneskôr v pondelok, <u>13. októbra 1997</u> (rozhodujúca je pečiatka pošty) na adresu

PIKOMAT
P-MAT, n. o.
Hrušková 30
831 06 Bratislava

<u>Riešenia poslané po tomto termíne nebudú opravené.</u>