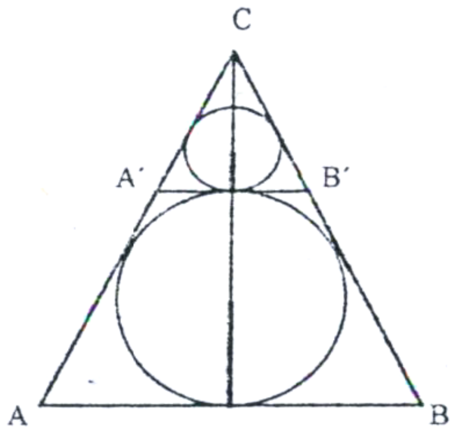
Vzorové riešenia 3.série zimnej časti PIKOMATU

1.príklad

Kamilko vlastne počíta obsah trojuholníka ABC. Keďže tento trojuholník je rovnostranný, stačí mu zistiť veľkosť jednej z jeho strán alebo jeho výšku, keďže vie, že obsah rovnostranného trojuholníka vypočíta jako

$$S_{\Delta ABC}=\frac{a\cdot v_a}{2}=\frac{a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a}{2}=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}\cdot 2\cdot v_a}{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{v_a^2\cdot\sqrt{3}}{3}$$

Takže čo keby sme skúsili akosi vypočítať výšku trojuholníka? Iste už nejaký jej kúsok poznáme, je to práve polomer malého kruhu. Vieme, že obsah kruhu možme, okrem iných záludnejších techník, vypočítať ako $S = \pi r^2$. Keď teda obsah menšieho kruhu je 6π , jednoduchým riešením rovnice $\pi \,.\, r^2 = 6\pi$ získam $r = \sqrt{6}$. Krátkym pohľadom na obrázok zisťujeme, že polomer malého kruhu tvorí tretinu dĺžky ťažnice t'_a malého rovnostranného trojuholníka A´B´C.



Ťažnica t'_a je zas tretinou výšky (a zároveň ťažnice) trojuholníka ABC (pretože stred kružnice k vpísanej Δ_{ABC} leží presne v ťažisku tohoto trojuholníka, tak jeho polomer tvorí 1/3 výšky Δ_{ABC}; teda priemer kružnice k tvorí 2/3 výšky Δ_{ABC} a na t'_a ostala dĺžka 2/3 výšky Δ_{ABC}). Z týchto siahodlhých úvah vyplýva, že $v_a = 3.3.\sqrt{6} = 9.\sqrt{6}$. Keď použijeme, že $S_{\Delta ABC}=\frac{v_a^2\cdot\sqrt{3}}{3}$, tak dostaneme ***$S\Delta_{ABC} = 162\sqrt{3}$ dĺžok štvorcových.***

2.príklad

$46\ 656\ 000\ 000 = 2^{12} .3^{6} .\ 5^6$

Keďže sa v súčine deliteľov hľadaného čísla nachádzajú len mocniny 2, 3, 5 tak i v samotnom čísle sa nachádzajú len mocniny 2, 3, 5. Kedže v súčine deliteľov hľadaného čísla je exponent pri základe 2 väčší ako pri ostatných číslach, zrejme bude i v samotnom čísle exponent pri základe 2 väčší ako pri ostatných číslach.

Najmenším takýmto číslom je $2^2 . 3 . 5 = 60$
Jeho delitele sú
2 3 5 - základ umocnený na exponent pod číslom.

0 0 1 = $2^0 . 3^0 . 5^1 = 5$
0 1 0 = $2^0 . 3^1 . 5^0 = 3$
0 1 1 = $2^0 . 3^1 . 5^1 = 15$
1 0 0 = $2^1 . 3^0 . 5^0 = 2$
1 0 1 = $2^1 . 3^0 . 5^1 = 10$
1 1 0 = $2^1 . 3^1 . 5^0 = 6$
1 1 1 = $2^1 . 3^1 . 5^1 = 30$

2 0 0 = $2^2 . 3^0 . 5^0 = 4$
2 0 1 = $2^2 . 3^0 . 5^1 = 20$
2 1 0 = $2^2 . 3^1 . 5^0 = 12$
2 1 1 = $2^2 . 3^1 . 5^1 = 60$
----
12 6 6 = $2^{12} . 3^6 . 5^6 = 46\ 656\ 000\ 000$

Hľadané číslo ***je číslo $2^2 . 3 . 5 = 60$.***

3.príklad

Krúpik vlastne hovorí, že pre tie nešťastné čísla p platí: $2p + 1 = n^3$. Keďže ľavá strana je iste nepárne číslo, musí byť aj pravá strana nepárne číslo, aby bola rovnosť zachovaná. Teda n^3 musí byť nepárne číslo a to bude práve vtedy, keď aj n bude nepárne, čiže tvaru 2k + 1. Teda riešením rovnice získam:

$$
\begin{aligned}
2p + 1 &= (2k + 1)^3 \\
2p + 1 &= 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 \\
p &= 4k^3 + 6k^2 + 3k \\
p &= k.(4k^2 + 6k + 3)
\end{aligned}
$$

Keďže p je prvočíslo, dá sa rozložiť na súčin jedine v tvare p = 1.p. Teda musí byť k = 1. Z toho vyplýva, že p = 1.(4 + 6 + 3) = 13. V domčeku býva ***chúďa samo jediné nešťastné číslo 13.***

4.príklad

V tomto príklade bolo najťažšie vymyslieť stratégiu počítania pravouholníkov (pravouholník je taký útvar, ktorý má všetky vnútorné uhly pravé - t.j. obdĺžnik alebo štvorec) tak, aby sme ani jeden nevynechali. Myslím, že nasledovná taktika je jedna z tých šikovnejších, predvediem ju na obdĺžniku 5x4.

	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	F	G			
3					
4					

Najprv spočítam pravouholníky prislúchjúce bodu A.

Urobím si tabuľku všetkých možných obdĺžnikov obsahujúcich bod A: v riadkoch tabuľky je výška takýchto obdĺžnikov, v stĺpcoch ich šírka. Keď je možné takýto obĺžnik urobiť, zaznačím do tabuľky "x". Napr. x v treťom stĺpci a druhom riadku znamená, že môžem zostrojiť obdĺžnik 3x2. V prípade bodu A bude teda plná celá tabuľka, teda môžem zostrojiť 5.4 = 20 pravouholníkov.

výška b \ dĺžka a	1	2	3	4	5
1	x	x	x	x	
2	x	x			
3					
4					

Postúpim do bodu B. Niektoré pravouholníky obsahujúce bod B sme však už započítali - sú to tie, ktoré obsahujú aj bod A. Ako sa vyhnúť ich započítaniu? Budem uvažovať len pravouholníky, ktoré sú od budu B *"NAPRAVO"* a *"DOLU"*. Teda tabuľka pre bod B bude vyzerať takto:

výška b \ dĺžka a		1	2	3	4
1	A	x	x	x	x
2		x	x		
3					
4					

Akoby som vynechala prvý stĺ pec predošlej tabuľky. Pre bod B teda existuje 4.4 = 16 pravouholníkov. Pri bode C budú prázdne prvé dva stĺpce, je teda možné nakresliť 3.4 = 12 pravouholníkov. Obdobne pre bod D 2.4 = 8 a bod E 1.4 = 4 pravouholníky. Pre bod F by tabuľka vyzerala, vďaka pravidlu *"NAPRAVO"* a *"DOLU"* ako s vynechaným prvým riadkom. Čiže 5.3 = 15 pravouholníkov. Pre bod G by sme vynechali prvý riadok aj stĺpec, teda by sme získali 4.3 = 12 pravouholníkov.

Dokopy to teda bude:

5.4 + 4.4 + 3.4 + 2.4 + 1.4
+
5.3 + 4.3 + 3.3 + 2.3 + 1.3
+
5.2 + 4.2 + 3.2 + 2.2 + 1.2
+
5.1 + 4.1 + 3.1 + 2.1 + 1.1

Je ľahké zistiť, že je to vlastne :

(5 + 4 + 3 + 2 + 1).4 +
(5 + 4 + 3 + 2 + 1).3 +
(5 + 4 + 3 + 2 + 1).2 +
(5 + 4 + 3 + 2 + 1).1

A to je to isté, ako (5 + 4 + 3 + 2 + 1).(4 + 3 + 2 + 1) pravouholníkov.

Krátkou úvahou vidím, že teda pre obdĺžnik 8x5 to bude dokopy (8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1).(5 + 4 + 3 + 2 + 1) pravouholníkov.

No a nakoniec pre obdĺžnik m x n je to (m+ (m-1) + ... + 1).(n + (n-1) + ... + 1) pravouholníkov.

Ako ten počet to najrýchlejšie vypočítať? Snáď viete, že súčet (n + (n-1) + ... + 1) je rovný $\frac{n(n+1)}{2}$ (návod: spočítajte v zátvorke prvé číslo s posledným, druhé s predposledným, atď., dostanete n/2 rovnakých súčtov).

Teda napríklad pre obdĺžnik 8x5 je celkový počet pravouholníkov $\frac{8\cdot 9}{2}\cdot\frac{5\cdot 6}{2}=36\cdot 15=540$

Kontrapravouhlovanie je vlastne "opačná" úloha ku pravouhlovaniu. V našom príklade vlastne hľadáme m,n také, že (m + (m-1) + ... + 1) . (n + (n-1) + ... + 1) = 210, čo je to isté ako $\frac{m\cdot(m+1)}{2}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}=210$

Teda $m.(m + 1).n.(n + 1) = 840$.

Viem, že $840 = 2^3.3.5.7$. Ďalej m, $(m + 1)$ a n, $(n + 1)$ sú dve a dve po sebe idúce čísla. Teda postupne vyskúšam všetky možnosti rozkladu (prvý stĺpec zvolím, druhý doplním na súčin rovný 840 tak, aby to boli po sebe čo najbližšie idúce čísla):

1.2	20.21
2.3	10.14
3.4	7.10
4.5	6.7
5.6	4.7
6.7	4.5
7.8	3.5
14.15	1.4
20.21	1.2

Vidím, že vlastnosť "po sebe idúcich čísel" spĺňajú dvojice 1,2 a 20,21 a takisto 4,5 a 6,7. ***Hľadaný obdĺžnik má teda rozmery 1x20, resp. 20x1 alebo 4x6, resp. 6x4.***

5.príklad

Keď máme druhú mocninu čísla končiacu 5-kou, tak i samotné číslo končí 5-kou.

$(10k + z).(10k + z) = 100k^2 + 20kz + z^2 = 10.(10k^2 + 2kz) + z^2$

k, z sú celé čísla, z je číslo od 0 do 9.

Z toho je vidieť, že poslednú cifru ovplyvní len z2. Ale len 52 končí 5-kou z čísel 0 až 9. Hľadané číslo teda končí 5-kou.

$(10k + 5).(10k + 5) = 100.k^2 + 20.5.k + 5^2 = 100.(k^2 + k) + 25$,
kde k sú prirodzené čísla.

k = 1 potom $100.(1^2 + 1) + 25 = 225$ - nevyhovuje (nie je 4-ciferné)
k = 2 potom $100.(2^2 + 2) + 25 = 625$ - nevyhovuje (nie je 4-ciferné)
k = 3 potom $100.(3^2 + 3) + 25 = 1225$ - nevyhovuje
k = 4 potom $100.(4^2 + 4) + 25 = 2025$ - vyhovuje
k = 5 potom $100.(5^2 + 5) + 25 = 3025$ - vyhovuje
k = 6 potom $100.(6^2 + 6) + 25 = 4225$ - nevyhovuje
k = 7 potom $100.(7^2 + 7) + 25 = 5625$ - nevyhovuje
k = 8 potom $100.(8^2 + 8) + 25 = 7225$ - nevyhovuje
k = 9 potom $100.(9^2 + 9) + 25 = 9025$ - vyhovuje
pri k = 10 je už $100.(10^2 + 10) + 25 = 11025$ päťciferné číslo.

Hľadanými číslami sú ***čísla 2025, 3025 a 9025.***

6.príklad

Tu vám vaše nápady neprezradím, pretože zmizli aj s Vagim pravdepodobne tiež v nejakej Čiernej diere. Akurát prezradím, že o ne určite neprídete - možno vyjde špeciálna príloha s názvom "Č.D.".

Aby ste sa však nesťažovali, tak aspoň ja si myslím, že milý bodík sa premietol do akéhosi štvorrozmerného priestoru, a tým štvrtým rozmerom bola nezištná láska. Ako si tam tak poletoval, stretol jednu bodkočiarku ... a žili šťastne, hádam aj naveky.