Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

30. ročník www.pikomat.sk školský rok 2012/2013

Vzorové riešenia 3. série letnej časti, kategória 7–9

Úloha S1: Hladovka. *Opravoval Samuel Sučík.*

Pýtame sa na najdlhšiu hladovku, takže nás budú zaujímať iba tie dátumy, v ktorých sa nejaká cifra vyskytuje viackrát. Hľadáme najdlhšie obdobie, v ktorom všetky dátumy majú túto vlastnosť (že sa v nich nejaká cifra opakuje).

V prvom rade si treba uvedomiť, že najdôležitejším v tejto úlohe je práve číslo roku. Ak sa totiž už v samotnom čísle roku opakuje nejaká cifra, potom je jasné, že celý ten rok sa musí hladovať. No a ak sú v čísle roku všetky cifry rôzne, potom sa určite aspoň niektoré dni v tom roku bude žrať, takže hladovka sa preruší. Prečo? Zjednodušme si to a pozerajme sa iba na jednociferné dni a jednociferné mesiace. Tie môžu byť zapísané pomocou akýchkoľvek cifier od 1 až po 9. Takže sa určite vyskytne aj taký deň a taký mesiac, ktorých cifry ešte nie sú použité v zápise roku – takže vznikne dátum so všetkými ciframi rôznymi a hladovke je koniec.

Práve sme zistili, že planétožrúti nemôžu hladovať počas žiadneho celého roku, ak sa v čísle roku neopakujú číslice. Ďalšou úlohou je teraz nájsť čo najdlhšie obdobie, počas ktorého sa v každom čísle roku budú opakovať nejaké cifry.

V čísle roku sa cifra na mieste tisícok mení každých tisíc rokov, cifra na mieste stoviek každých sto rokov, cifra na mieste desiatok každých desať rokov a cifra na mieste jednotiek každý rok. Najzriedkavejšie sa menia cifry na miestach tisícok a stoviek. Preto práve na týchto miestach vydržia tie isté dve rovnaké cifry najdlhšie – sto rokov (čo zároveň hovorí, že planétožrúti budú určite hladovať aspoň sto rokov). Pozrime sa teda na to, aké sú najdlhšie obdobia pre roky v tvare 11AB, 22AB,...,88AB (roky 99AB už presahujú cez hranicu 9000 rokov).

11AB – najdlhšie obdobie je od roku 1099 do roku 1202
22AB – najdlhšie obdobie je od roku 2199 do roku 2300
33AB – najdlhšie obdobie je od roku 3299 do roku 3400
44AB – najdlhšie obdobie je od roku 4399 do roku 4500
55AB – najdlhšie obdobie je od roku 5499 do roku 5600
66AB – najdlhšie obdobie je od roku 6599 do roku 6700
77AB – najdlhšie obdobie je od roku 7699 do roku 7800
88AB – najdlhšie obdobie je od roku 8797 do roku 8900

Vidíme, že najdlhšie obdobia sú pre možnosti 11AB a 88AB. Ešte treba zistiť ich presnú dĺžku, teda posúvať ich začiatok dozadu a koniec dopredu tak dlho, až sa dostaneme ku dňu, kedy plánetožrúti žerú. Rýchlo sa dostaneme k tomu, že obdobie pre roky 11AB trvá od 27.7.1098 (tu nám pomohlo, že mesiace 10., 11., 12. obsahujú cifru 1, ktorá je aj v čísle roku, ôsmy a deviaty mesiac budú tiež hladovať, lebo 8 a 9 sú v čísle roku) do 4.4.1203 (tiež nám pomohlo, že čísla mesiacov 1., 2. a 3. sú v čísle roku 1203) a obdobie pre roky 88AB trvá od 31.12.8796 do 3.2.8901. Porovnaním prídeme k záveru, že **najdlhšie obdobie hladu trvá od 27.7.1098 do 4.4.1203.**

Bodovanie:

Len za výsledok ste mohli dostať 2 b. Za riešenie s drobnými chybami ako napríklad 26.7.1098 – 5.4.1203 ste dostávali obvykle 4,5 b, za úplne chybné jedno ohraničenie najdlhšej hladovky som strhával 1 b, za nedostatočný postup –1 b až –3 b.

Úloha S2: Dobrý zrak. *Opravovala Lenka „Lenika“ Bendová.*

Nikto z planétožrútov v garáži nemal počet očí deliteľný tromi (0, 3, 6, 9, 12,15,.......,3k, kde *k* je prirodzené číslo). To znamená, že mohli mať 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, ... očí. Tieto počty môžeme podľa deliteľnosti tromi rozdeliť do 4 skupín:

1. skupina - obsahuje nepárne čísla, ktoré pri delení tromi dávajú zvyšok 1 (1, 7, 13, 19, ..., 3k – 2, kde *k* je nepárne prirodzené číslo)

2. skupina - obsahuje nepárne čísla, ktoré pri delení tromi dávajú zvyšok 2 (5, 11, 17, 23, ..., 3l + 2, kde *l* je nepárne prirodzené číslo)

3. skupina - obsahuje párne čísla, ktoré pri delení tromi dávajú zvyšok 1 (4, 10, 16, 22, ..., 3p + 1, kde *p* je párne prirodzené číslo)

4. skupina - obsahuje párne čísla, ktoré pri delení tromi dávajú zvyšok 2 (2, 8, 14, 20, ..., 3q – 1, kde *q* je párne prirodzené číslo)

Sčítaním ľubovoľného čísla z 1. skupiny s ľubovoľným číslom z 2. skupiny dostaneme číslo deliteľné šiestimi: (3k – 2) + (3l + 2) = 3 (k + l). Keďže *k* aj *l* sú nepárne, ich súčet je párny, a teda deliteľný dvomi. Potom súčin 3(k + l) je deliteľný tromi aj dvomi zároveň, a teda je deliteľný šiestimi.

Rovnako aj sčítaním ľubovoľného čísla z 3. skupiny s ľubovoľným číslom zo 4. skupiny dostaneme číslo deliteľné šiestimi: (3p – 1) + (3q + 1) = 3 (p + q), kde *p* aj *q* sú párne čísla, teda aj ich súčet je párny a platí to isté čo v predošlom odseku – súčin 3(p + q) je deliteľný tromi aj dvomi zároveň, a teda je deliteľný šiestimi.

Žiadna iná kombinácia skupín nám nedá súčet deliteľný šiestimi (vyskúšajte si to).

To znamená, že ak dvaja z troch planétožrútov majú mať súčet počtu očí deliteľný šiestimi, musí byť jeden z 1. a jeden z 2. skupiny, alebo jeden z 3. a jeden zo 4. skupiny. Tretí potom môže byť z ktorejkoľvek zo skupín. Ak tieto výbery zapíšeme, dostaneme tieto možnosti:

a) 1, 2, 3 b) 1, 2, 4 c) 1, 3, 4 d) 2, 3, 4

Ak budú v skupine v garáži štyria planétožrúti, z ktorých má každý počet očí z inej skupiny, bude Zig Zagove pozorovanie splnené. Ak by v garáži bolo päť alebo viac planétožrútov, bolo by skupín viac menej ako planétožrútov a teda by museli najmenej dvaja byť z tej istej skupiny. Ak by teda napríklad boli dvaja z 1., jeden z 2., jeden z 3. a jeden zo 4. skupiny, bola by medzi možnosťami výberu napr. nasledovná: 1, 1, 4. Súčet počtu očí z prvej skupiny by bol deliteľný dvomi, súčet počtu očí z prvej a štvrtej skupiny by bol deliteľný tromi, ale nie šiestimi. Zig Zagove pozorovanie by splnené nebolo.

Odpoveď: *V skupine v garáži teda môžu byť najviac štyria planétožrúti, a to v prípade, ak je každý z inej skupiny.*

Bodovanie:
Plný počet bodov dostali správne riešenia s kompletným popisom. Za nepresnosti alebo chyby v riešení išli body dolu. Za správny výsledok bez postupu ste dostali 2 body a za nesprávny od 0 po 1,5 podľa toho, či aspoň niektoré kroky v postupe boli správne.

Úloha S3: Kontrolná otázka. *Opravovala Katarína Marčeková.*

Na začiatok si súčet všetkých čísel napísaných na dverách označme S a niektoré (je jedno ktoré) z týchto čísel si označme x. Súčet všetkých čísel okrem čísla x je teda S-x. Zadanie nám hovorí, že tento súčet (S-x) sa má rovnať dvojnásobku čísla x, čo si môžeme zapísať ako rovnicu.

$S - x = 2x$

Pričítaním x na obe strany a následnom vydelení rovnice tromi dostávame vzťah $x = \frac{S}{3}$.

Vidíme, že číslo x, ktoré sme si na začiatku vybrali sa rovná tretine súčtu všetkých čísel.

Predstavme si, že by sme si takúto rovnicu napísali pre niektoré iné z čísel na dverách, označme si ho y. Znovu by nám vyšlo, že sa toto číslo musí rovnať tretine celkového súčtu, teda dostali by sme $y = \frac{S}{3} = x$. Môžeme si všimnúť, že takýto výsledok by sme dostali, keby sme si vybrali hociktoré číslo na dverách. Takže vieme, že čísla na dverách sa navzájom rovnajú a rovnajú sa výrazu $\frac{S}{3}$.

Písmenom *n* si označme, koľkokrát je na dverách napísané číslo $\frac{S}{3}$. Vieme, že súčet všetkých čísel na dverách je S, preto musí platiť, že $n * \frac{S}{3} = S$. Po vynásobení tejto rovnice tromi dostávame $n * S = 3 * S$ a po vydelení S dostávame $n = 3$.

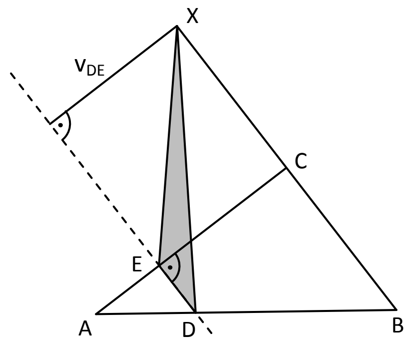
Na dverách teda musia byť napísané práve tri čísla.

Bodovanie:
1 bod za myšlienku a dôkaz, že na dverách nemôže byť jedno alebo dve čísla (z toho 0,5b za odôvodnenie), 2 body za nájdenie riešenia (tri navzájom rovnajúce sa čísla) a 2 body za odôvodnenie, že na dverách nemôžu byť viac ako tri čísla (ak bol tento záver len vyslovený, bez dostatočného vysvetlenia, strhávala som 1 bod).

Úloha S4: Hľadanie. *Opravoval Roman Kluvanec.*

Na začiatku riešenia sme si zistili dĺžky zvyšných dvoch strán pomocou pomeru, ktorý sme mohli vyčítať zo zadania. Zistili sme si dĺžku jedného dielika ako 15/5=3 a potom sme zistili zvyšné dve strany, teda $|BC| = 3 \cdot 3 = 9$ a $|CA| = 4 \cdot 3 = 12$. Keďže body D,E ležia v tretinách strán, tak aj dĺžky |AD|, |AE| sú tretiny z dĺžok |AB| a |AC|. Potom sme chceli zistiť dĺžku |DE|. ΔABC a ΔADE sú podobné, pretože sa zhodujú v pomere dvoch strán, lebo body D,E ležia v tretinách strán AB, resp. AC a trojuholníky majú spoločný uhol <DAE. To znamená, že aj dĺžka |DE| bude jedna tretina z dĺžky |BC|. Teda $|DE| = \frac{|BC|}{3} = \frac{9}{3} = 3$. Aby sme vedeli vypočítať obsah trojuholníka DEX, musíme poznať aj jeho výšku na stranu DE.

Zo zadania vieme, že bod X je obrazom bodu B v stredovej súmernosti so stredom C. Z toho je pre nás najpodstatnejšie, že leží teda na priamke BC. Tá je rovnobežná s priamnou ED a kolmá na priamku AC. To znamená, že aj priamky AC a ED sú kolmé. Výška na stranu DE je teda tak dlhá, ako úsečka EC. Vidíme to pekne aj na obrázku. Keďže bod E leží v tretine strany AC, potom dĺžka |EC| je rovná 2/3 dĺžky |AC|. Teda $|EC| = \frac{2}{3} * |AC| = \frac{2}{3} * 12 = 8$. Obsah trojuholníka DEC už potom vypočítame ako $S_{DEC} = \frac{|DE| * |EC|}{2} = \frac{3*8}{2} = \frac{24}{2} = 12\mathrm{m}^2$. Obsah trojuholníka DEX, ktorý musí Zig Zag prehľadať je **12 m²**.



Bodovanie:
1,5 bodu bolo za správny obrázok a správne vypočítané dĺžky strán a,b,c. 1 bod bol za zistenie dĺžky |ED|. 1 bod bol za zistenie dĺžky |EC|. 1,5 bodu bolo za správny výpočet a výsledok.

Úloha S5: Vypínač. *Opravovala Ľudmila „Ľudka" Šimková.*

Najskôr si vypíšeme, čo všetko musia spĺňať čísla, ktoré by mohli byť heslom a potom nájdeme najväčšie z nich.

Vieme, že cifry hesla musia byť prvočísla. Teda číslo, ktoré hľadáme sa skladá len z čísel 2, 3, 5 a 7 (všetky jednociferné prvočísla). Ďalej vieme, že ak sa nejaké číslo končí dvojkou a je aspoň dvojciferné, tak to nie je prvočíslo, pretože je deliteľné dvomi a je väčšie ako dva. Preto ak by sa dvojka nachádzala aj na nejakom inom mieste ako na začiatku hesla, vieme spolu s číslom pred ňou vytvoriť dvojčíslie, ktoré nie je prvočíslo, pretože je deliteľné dvomi. Podobne, ak by sa číslo 5 nachádzalo inde ako na začiatku, viem vytvoriť dvojčíslie, ktoré touto päťkou končí a teda nie je prvočíslo, pretože je deliteľné piatimi. Taktiež heslo nemôže obsahovať dve po sebe idúce rovnaké cifry, pretože toto dvojčíslie by bolo deliteľné 11 a nebolo by prvočíslom. Z tohto vieme, že dvojka a päťka sa môžu nachádzať len na začiatku hesla a ďalej sa musia striedať cifry 3 a 7.

Zistime, aký najdlhší môže byť reťazec, v ktorom sa strieda trojka a sedmička. Ak by začínal trojkou tak potom čísla 3, 37, 373 vyhovujú (všetky sú prvočísla a aj všetky súvislé skupiny v nich sú prvočísla), ale 3737 už nevyhovuje napríklad preto, že 737 je deliteľné číslom 11 (over si to :-)). Tento reťazec môže byť teda najviac trojciferný. Ak by bol viacciferný, tak by sa v ňom už nachádzala skupina 737, ktorá nie je prvočíslom. Rovno sme si aj ukázali, že ak by začínal cifrou 7, tak môže byť najviac dvojciferný (73 ešte vyhovuje, ale 737 už nie).

Skúsme teraz postupne dávať na začiatok dvojku a päťku (pred reťazce tvorené trojkou a sedmičkou) a nájdime najväčšie číslo, ktoré vyhovuje všetkým podmienkam hesla. 5373 nevyhovuje, pretože 537 je deliteľné trojkou. Takisto 2373 nevyhovuje, pretože 237 je deliteľné trojkou. Nevyhovuje ani 573 pretože rovnako ako 537 je deliteľný trojkou. Teraz môžeme povedať, že najväčšie číslo, ktoré vyhovuje je 373, pretože ak by aj vyhovovali čísla 273 a 237 (a menšie dvojciferné) tak sú menšie ako číslo 373.

Naše heslo je preto číslo 373.

Nepotrebovali sme však zistiť, aký najdlhší môže byť reťazec z trojky a sedmičky. Dokonca ani to, že 2 a 5 sa môžu nachádzať len na začiatku čísla (aj keď sa také možnosti v postupe ďalej vylúčili). Mnohí z Vás rozoberali 4 možnosti podľa toho, ktorou cifrou by mohlo číslo začínať. Vypisovaním ste ukázali, že so začiatočnou cifrou 2, 5 a 7 Vám žiadne trojciferné číslo nevyhovuje a pre začiatočnú cifru 3 nevyhovuje žiadne štvorciferné číslo. Treba však spomenúť, ako v postupe vyššie, prečo nevyhovuje ani žiadne väčšie číslo. Stačilo napísať, že pripisovaním ďalších cifier sa táto nevyhovujúca trojica alebo štvorica bude stále na začiatku čísla nachádzať a teda nebude vyhovovať ani celé číslo.

Bodovanie:

Podmienky, ktoré musí spĺňať heslo: 0 až 4 b.
Ukázanie, že väčšie číslo nevyhovuje: 1b.
Zlé prvočísla v riešení: - 0,5 až -1,5 b. (Podľa správnosti a jednoznačnosti postupu.)
Neoverenie niekoľkých menších prípadov: -0,5 b.
Bodovanie záležalo od postupu, ktorým ste príklad riešili.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09