Príklad M5: Melóny. *Opravovala Veronika Jankovičová.*

Máme 5 melónov, ktorých váhy si označíme m1 až m5. Ich presnú váhu dokážeme určiť 5 váženiami takto:
1. váženie: odvážime si všetky melóny spolu (m1 + m2 + m3 + m4 + m5) a ich spoločnú váhu si označíme napr. A.
2. váženie: jeden melón sme z váh odobrali (napr. m5). Na váhe nám zostali 4 melóny a ich spoločnú váhu si označíme ako B. Váha melónu m5 je teda rozdiel 1. a 2. váženia, A – B.
3. váženie: z váhy sme odobrali ďalší melón (m4), čím nám zostali na váhe 3 melóny, ktorých spoločnú váhu označíme ako C. Váha melónu m4 je rozdiel 2. a 3. váženia, teda B – C.
4. váženie: odobrali sme aj melón m3, zostali nám na váhe 2 melóny m1 a m2, ktorých spoločnú váhu označíme ako D. Ešte stále ich spoločná hmotnosť bude určite nad 10 kg. Váha m3 bude rozdiel 3. a 4. váženia, teda C – D.
5. váženie: na váhe sme mali melóny m1 a m2, ktorých spoločnú váhu sme zistili pri 4. vážení, teda ak nahradíme melón m2 melónom m3, ľahko určíme váhu m1 (m1 + m3 = E, poznáme E aj m3, teda E – m3 = m1), a keď už poznáme m1, vieme vypočítať m2 (D – m1 = m2).

Najčastejšie chyby:
To, že v zadaní je napísané, že melóny mali 7, 8 alebo 9 kg, neznamená, že tam musí byť z každej váhy aspoň jeden. Niektorí z vás s týmto počítali, a preto sa u vás objavili isté nepresnosti (napr. keď máme na váhe 2 melóny a spolu vážia 15 kg, nevieme presne určiť, ktorý z nich má 8 kg a ktorý 7 kg).

Bodovanie:
správny postup...3 body;
správny výsledok...2 body;
za nepresnosti v postupe, ktoré som už vyššie spomenula a nedostačujúce vysvetlenie som body strhávala.

PIKOMAT, 26. ročník šk. rok 2008/2009

PIKOMAT

Vzorové riešenia 3. série, kategória 5-6

Príklad M1: Vyhchádzka. *Opravovala Nina Kuklišová.*

Ahojte predbiehači! V zadaní bolo celkom presne opísané, ako sa môžu predbiehať deti, no vôbec nebolo spomenuté, či sa môže predbiehať aj pani učiteľka, takže tu boli prípustné 2 správne riešenia.

Pokiaľ sa pani učiteľka nemôže predbiehať, tak zo začiatočného usporiadania nikdy nemôžeme prísť k usporiadaniu 2, 3, 4, 5, 6, 7, pani učiteľka, 1. Spomedzi čísel, ktoré by mali predbehnúť p. učiteľku, sú totiž 3 párne a 3 nepárne; keďže dvojica čísel s párnym súčtom sa dá utvoriť len z dvoch párnych alebo dvoch nepárnych čísel, tak sa tieto čísla nedajú usporiadať do 3 vyhovujúcich dvojíc, a teda pani učiteľku takto predbehnúť nemohli.

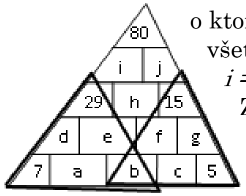
Ak pripustíme, že pani učiteľka by sa tiež mohla predbiehať, tak sa nám ponúka riešenie: 3 nepárne čísla sú pred pani učiteľkou a 1 je za ňou; takže sa museli aspoň dve dvojice detí s nepárnymi číslami na čiapočkách predbehnúť pred pani učiteľku a tá potom musela predbehnúť to s číslom 1.

Aby sa deti museli čo najmenej predbiehať, bude najvýhodnejšie, ak posledná dvojica bude 7 a 1 a prvá 3 a 5. Nepárne čísla sú len 3, teda budú musieť ísť za sebou; jedna dvojica predbehne pani učiteľku, tá predbehne jedno dieťa, a to potom aj s druhým s párnym číslom predbehne pani učiteľku. Opäť, aby sa deti museli medzi sebou čo najmenej predbiehať, bude najvýhodnejšie, ak prvá dvojica bude 2 a 4 a druhá 4 a 6. Predbiehanie párnych čísel musí nastať pred predbehnutím 7 a 1; takže na začiatku pôjdu deti v poradí p. učiteľka, 3, 5, 2, 4, 6, 7, 1; po 4 predbehnutiach dvojíc a 2 predbehnutiach pani učiteľky bude poradie 3, 5, 2, 4, 6, 7, p. učiteľka, 1 a tu nám už stačia len 3 predbehnutia na to, aby sme dostali poradie, ktoré chceme.

Pod pojmom „predbiehanie“ bola pôvodne myslená výmena pozícii detí vedľa seba stojacich, alebo pani učiteľky a detí vedľa nej stojacich. No keďže to tiež nebolo presne povedané, uznané boli aj predbiehnia , ktoré boli obehnutím viacerých detí; pokiaľ spĺňali všetky kritériá predbiehania.

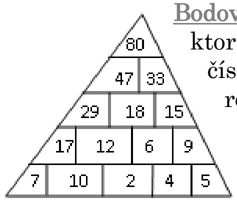
Bodovanie: Tí z Vás, ktorí vysvetlili, prečo sa dané poradie docieliť nedá, ak sa pani učiteľka nepredbieha, alebo našli najmenší možný počet predbiehaní s predbiehaniami pani učiteľky, dostali 5 bodov.
Tí, ktorí opísali obidve možnosti, majú aj veľkú pochvalu! Menej presné vysvetlenia dostávali 3-4 body. Predbiehania, ktoré nedodržiavali niektoré zásady v zadaní, dostali 1 – 1,5 boda.

Príklad M2: Pyramída. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*



Označím si políčka v pyramíde, aby sa mi ľahšie vysvetľovalo, o ktorých hovorím. Horná časť bola ľahká a poradili ste si s ňou skoro všetci – ak sa má číslo 80 rovnať súčtu čísel pod ním, a vieme tiež, že $i = 29 + h$; $j = 15 + h$, tak potom sa 80 musí rovnať $29 + h + h + 15$. Z toho už ľahko spočítame, že na mieste ***h*** je číslo ***18***. Teraz už vieme určiť aj čísla na miestach *i* a *j* – budú tam čísla 47 a 33.

Ako ale určiť čísla v spodných dvoch riadkoch pyramídy? Tam to už nebude také jednoduché. Môžností je niekoľko. Napríklad si porovnajme dve malé pyramídy s číslami 29 a 15 navrchu (vyznačené hrubo v obrázku). Rozdiel čísel na ich vrchoch je 14. Čo do tohto rozdielu prispieva? Číslo *b* ten rozdiel nerobí – to je v oboch pyramídach rovnako. Čísla 7 a 5 majú rozdiel len 2. Takže zvyšných 12 bude rozdiel tvorený číslami *a* a *c*. Ale pozor, ako sme si už ukázali (na čísle *h*; tu je to rovnako), aj číslo *a* aj číslo *c* sú tu zarátané dvakrát. Takže rozdiel $(2 \times a) - (2 \times c) = 12$. Čiže $2 \times (a - c) = 12$ a teda $a - c = 6$. A čo nám toto pomôže? No veď toto je zároveň aj rozdiel čísel *e* a *f*, keďže ten nie je ovplyvnený číslom *b*, ktoré je zarátané v oboch z nich! Takže ak vieme, že *e* je o 6 väčšie ako *f*, a ich súčet je 18, nie je nič ľahšie ako zistiť, že ***e = 12*** a ***f = 6***. A keď už máme toto, už ľahko zistíme zvyšok: *d* a *g* vyrátame ako rozdiel čísel nad nimi a vedľa nich a potom už môžeme rovnako vyrátať *a, c* aj *b*. Takže Šimonko mal tabuľku doplniť takto:



Bodovanie: Správne čísla vo všetkých políčkach...1,5b. Použitie úvahy, ktoru sme sa dopracovali (nielen) k číslu 18...2b. Nájdenie zvyšných čísel (či už ste ich hľadali takto, alebo, ako niektorí z vás, sústavou rovníc, alebo inak)...ďalšieho 1,5b. Tieto ste mohli dostať aj vtedy, ak ste tie čísla len nejako skúšali, ale bolo treba ukázať, že ste skúšali s rozmyslom – niektorí z vás napríklad prišli na to, že číslo *b* musí byť párne a menšie ako 10, čo je skvelá úvaha (ostatní, zamyslite sa nad tým ☺), ďalší ste ukázali, že *g* môže byť len jedno z čísel 6,7,8,9. Za samotné konštatovanie „skúšal som“ body nie sú.

Príklad M3: Futbal. *Opravovala Katarína „Katka“ Beláková.*

Možností, ako mohol prebehnúť futbalový turnaj, je strašne veľa. Preto sa treba radšej najprv zamyslieť, ako to urobiť tak, aby bol celkový finálny súčet bodov na konci turnaja čo najväčší a až potom spisovať tabuľku.

Remízu môžeme z nášho uvažovania úplne vylúčiť, lebo sa ňou celkovo získajú iba 2 body a obyčajnou výhrou (aj keby mal súper hneď 0 bodov) až 3. Pritom je úplne jedno, či je to výhra o 1 alebo o 5 gólov. Na tom nezáleží.

Tímy si označím A, B, C a D. Prvý zápas dám hrať tímy A a B (na písmenkách nezáleží, budú môcť byť aj poprehadzované). Povedzme nech vyhrá tím B. Tak získa 3 body.

	A	B	C	D
1. zápas	0	**3**	x	x
2. zápas	x	3	**6**	x
3. zápas	x	**12**	6	x
4. zápas	x	12	**21**	x
5. zápas	x	**36**	21	x
6. zápas	x	36	**60**	x
7. zápas	x	**99**	60	x
8. zápas	x	99	x	**102**

Teraz je vhodné zamyslieť sa, nad ďalším postupom. Ak chcem získať čo najviac bodov, musí vždy prehrať tím s najväčším počtom bodov (tak získa víťaz všetky jeho body plus 3 za výhru).

Tak som zapojila do hry C. Keďže tímy B a C majú najviac bodov, ďalej budú hrať len vzájomné zápasy (body sa takto čoraz rýchlejšie navršujú). Keby som čo i len raz zapojila do hry tím A alebo D, tak najvyšší počet bodov v nasledujúcom kole (teda aj získané body +3) bude nižší, ako keď vyhrá tím, ktorý má druhý najväčší počet bodov (teda striedavo B, C). Nakoniec zapojíme aj D, aby sme dodržali podmienku zo zadania. Zahrá si s tímom, ktorý má najviac bodov (B).

Najväčší možný finálny súčet bodov všetkých tímov je 0 + 99 + 60 + 102 = **261**. Ešte jedna nezodpovedaná otázka. Prečo sme v druhom zápase nasadili nový tím C, nestriedali len A, B a nenasadili C, D až na konci? Nuž... skúste, zistíte.

Bodovanie: Tabuľka s priebehom hry...1 bod; správny výsledok...1 bod. Ostatne body boli za zohľadnenie podmienky zo zadania (0,5 bodu) a dobre zdôvodnenú taktiku zvyšovania počtu bodov (2,5 bodu). Za pekné myšlienky som body pridala, za nepresnosti a nedostatočné vysvetlenia strhla.

Príklad M4: Hráči. *Opravovala Diana „Dee“ Odrobináková.*

Viacerí z vás sa správne dostali k vypísaniu všetkých možností počtov detí v triedach, avšak mnohí potom iba zhodnotili, že správnych odpovedí je viac a tým bol pre nich príklad uzavretý.

Možno teraz väčšinu z vás sklamem, ale príklad mal jednoznačné a jediné riešenie: *zo 6.D boli dvaja žiaci, zo 6.C boli traja, zo 6.B štyria a zo 6.A piati*, teda dokopy bolo súťažiacich 14 a súčin ich počtov bol 120 (2x3x4x5=120).

Ako ste mali k tomuto výsledku prísť? Nuž, ak ste si už vypísali všetky možnosti počtov a k nim súčiny, mohli ste si všimnúť, že niektoré súčiny sa opakujú viac ako raz. Odhalenie tejto indície vám mohlo napovedať, prečo sa Šimonko pýtal na počet žiakov zo 6.D - keďže *len pri jednom súčine sa stalo, že ho vytváralo viac rôznych počtov žiakov zo 6.D,* jediný možný dôvod jeho otázky a zároveň možné číslo domu mohlo byť 120 (boli tam dva rôzne počty pre 6.D - v 2 možnostiach bol jeden žiak a v 1 boli dvaja). Ale keďže po zodpovedaní otázky už Šimonkovi bolo všetko jasné, vyplýva z toho, že správna je tá možnosť s dvoma Déčkarmi (keďže je jediná). Hurá a máme výsledok! A bez tých indícii sa to zistiť samozrejme nedalo. (Jedine, že by Šimonko predpokladal, že musí súťažiť viac ako jeden žiak zo 6.D, čo však nemusela byť pravda).
Poznámka: Treba dávať pozor na presné znenie zadania. Napríklad sa mnohí domnievali, že celkový počet žiakov má byť deliteľný 4. Nikde to tam nie je napísané – mohlo by sa zdať, že to je nevyhnutné, ale nie je to tam, pretože potom by úloha nemala riešenie). Taktiež nikde nebolo napísané, že máte vytvoriť futbalovú jedenástku (potom by bol asi jasný aspoň počet všetkých žiakov a vôbec, veď aj v Šuplandii sa to hrá inak;).

Bodovanie: 1,5 boda ste mohli dostať za zvažovanie všetkých (alebo aspoň relevantných výsledkov); 1,5 boda za lúštenie indícií o čísle domu a Šimonkovej otázke a samozrejme za správnu odpoveď boli zvyšné dva body.