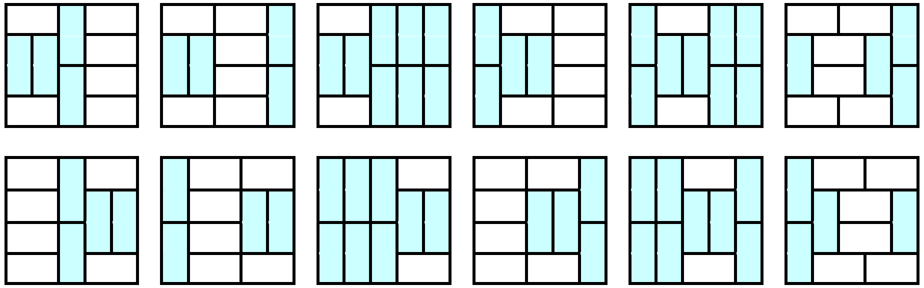
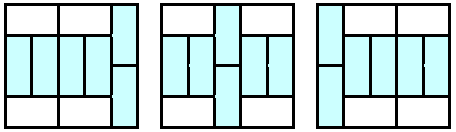
Tieto sa preklopiť nedajú. Dokopy ich je 12:



Pre 4 zvislé v strede je ich strašne málo, existujú len 3:



Ešte by sa dalo uvažovať na tým, či tieto dve možnosti nie sú jedno a to isté (veď keby som ju otočila o 180°, tak to je rovnaké). Dôležité je si uvedomiť, že to je miestnosť, a tu len tak hociako ako sa nám zachce otáčať nemôžeme. Stačí si napr. predstaviť, že niekde je okno, a niekde sú dvere, a zrazu to je jasné; raz to je naľavo od okna, inokedy zase na pravo.
Teraz to všetko stačí už len spočítať. *64+16+12+3 = 95.* Miestnosť je možné vydláždičkovať **95-timi** rôznymi spôsobmi.

Bodovanie: Čo sa týka bodovania, tak plný počet bodov dostali tí, ktorí našli všetky možnosti, t.j. tých 95. Tým, čo chýbalo pár možností, som dala po 4,5 bodu. Ďalej som prihliadala na spôsob, myšlienku, alebo systém, akým bolo vaše riešenie vyriešené. A samozrejme aj na počet nájdených riešení. Body som strhla, keď riešenie nemalo popis, na ktorý väčšina z vás zabudla, a pritom to je veľmi hodnotná vec, vďaka ktorej má opravovateľ možnosť lepšie pochopiť vaše riešenie. A najmä pri takomto type príkladov je to nad zlato.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

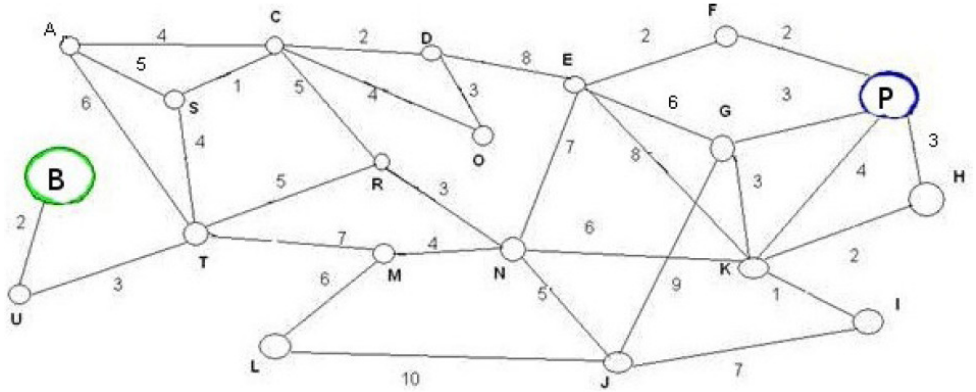
podporuje odborný rast organizátorov seminára

PIKOMAT, 25. ročník šk. rok 2007/2008

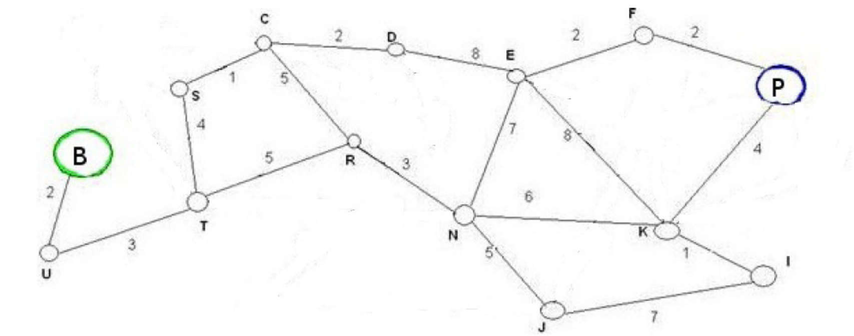
PIKOMAT

Vzorové riešenia 3. série, kategória 5-6

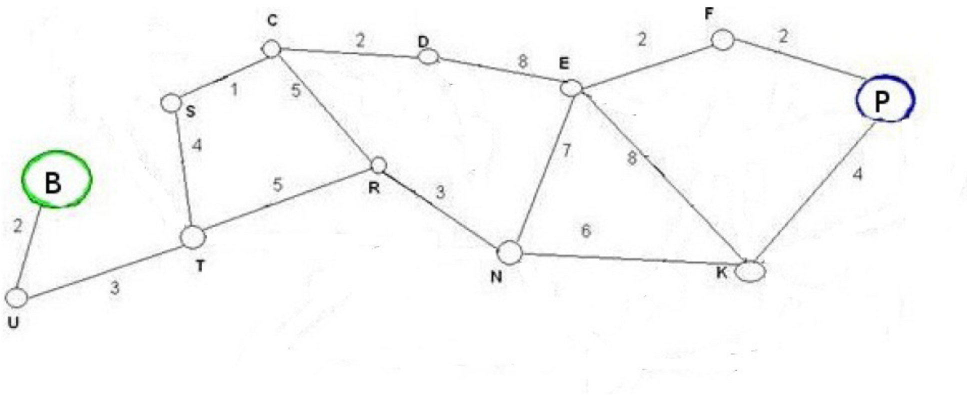
Príklad M1: Polícia. *Opravovala Diana „Dee“ Odrobináková.*



Môžeme si všimnúť jednu vec – niektoré križovatky sú úplne neužitočné. Napríklad taká križovatka O. Tá slúži len na prejazd z C do D. To sa ale predsa dá (a omnoho kratšie) aj priamo, teda O si môžeme z mapy vygumovať. Z podobných dôvodov môžeme vygumovať aj A, L, H, M (po vymazaní L mu ostanú už len dve neužitočné cesty), bo dokonca aj to škaredé G (každá cesta vedúca cez G sa dá prejsť aj inou cestou, ktorá G nepoužíva, skúste si to). Naša cestná sieť sa teda zúžila nasledovne:



Môžeme umazať J (z podobných dôvodov ako vyššie), čo nám z I vytvára samostatný výbežok, ktorý nám tiež nepomáha.

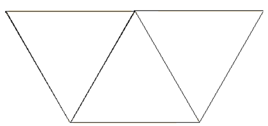


Teraz už ľahko preskúmame všetky možnosti a zistíme, že najkratšia cesta je B – U – T – R – N – K – P, ktorá má dĺžku 23.

Bodovanie: 5 bodov za úplne správne riešenie.

Príklad M2: Zápalky. *Opravovala Lenka „Lenika“ Bendová.*

Keďže všetky zápalky musia ležať na stole, uvažujeme iba rovinné útvary. Trojuholníky majú mať stranu dĺžky 1 zápalky, teda budú mať všetky tri strany rovnako dlhé a teda budú *rovnostranné*.
Na prvý trojuholník potrebujeme 3 zápalky. Ak chceme použiť čo najmenej zápaliek, tak na každý ďalší by sme mali využiť už raz použité zápalky (jedna zápalka teda bude tvoriť stranu dvom trojuholníkom). Na druhý trojuholník potrebujeme dve zápalky, na tretí tiež dve. Takto nám vznikol útvar znázornený na obrázku. Aby sme spravili ďalšie trojuholníky s využitím čo najmenšieho počtu zápaliek, mali by nadväzovať na tento útvar čo najväčším počtom strán. Môžeme pripojiť rovnaký útvar spodnou podstavou (ušetríme 3 zápalky). Takto sme vytvorili pravidelný šesťuholník. (rovnaký šesťuholník by sme získali aj postupným pripájaním trojuholníkov s tým, že by mali všetky spoločný jeden bod – „stred“ šesťuholníka). Tento tvar je veľmi výhodný, lebo v ňom má každý trojuholník 2 strany spoločné s iným trojuholníkom a iba jedna strana každého trojuholníka je využívaná len ním samým. Vo všetkých iných útvaroch zo šiestich trojuholníkov by boli minimálne dva také, ktoré by sa dotýkali len jedného ďalšieho. V šesťuholníku tomuto zamedzíme práve tým, že tieto 2 „akoby vytŕčajúce“ trojuholníky spojíme a tým ušetríme zápalku.

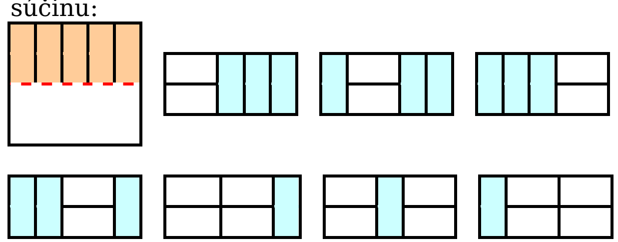


Teraz musíme už len pripojiť zvyšné 4 trojuholníky. Najlepšia možnosť je postupovať obdobne ako pri prvom šesťuholníku, ktorý sa nám osvedčil. Stačí,

Bodovanie: Stalo sa, že veľa z vás pochopilo úlohu nesprávne a myslelo si, že treba spočítať uhly trojuholníka, na čo bola jednoduchá odpoveď „je to 180°“. Takýmto riešeniam som dával 1,5 bodu, pretože predsa len to bolo treba využiť. Ak by sa vám nabudúce zdalo, že je úloha príliš ľahká alebo je nejaké jednoduché zadanie, nebojte sa nás opýtať na *pikomat@p-mat.sk*. My sa zase budeme snažiť, aby naše zadania boli čo najjednoznačnejšie.

Príklad M5: Dláždenie. *Opravovala Emília „Emi“ Szabadosová.*

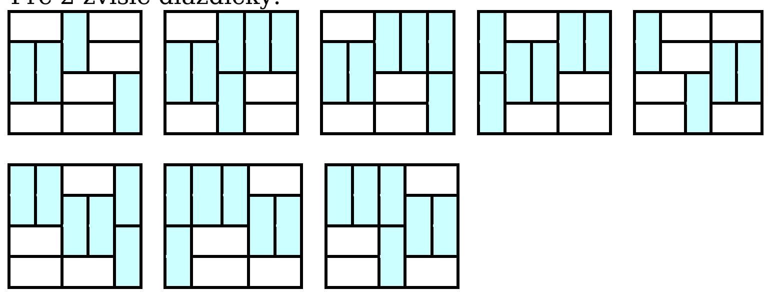
Tento príklad bol dosť desný, však? Veď vypisovať toľko možností, komu by sa chcelo?A tak vám píšem tento vzorák, v ktorom si ukážeme, že to ide aj trošku jednoduchšie.
Túto miestnosť si môžem rozdeliť na hornú a dolnú polovicu po 2x5. Následne si zistím, koľko rôznych možností usporiadania existuje pre jednu polovicu. Taktiež viem, že tieto isté možnosti sa budú dať vytvoriť aj pre druhú polovicu, a teda, ku každej jednej možnosti pre hornú, viem priradiť každú z možností pre dolnú polovicu. Takže počet možností pre miestnosť 4x5 sa bude rovnať ich súčinu:



Čiže ich bude *8.8 = 64*.

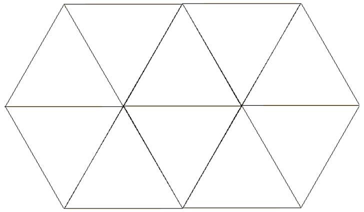
No ale to boli zvislé dlaždice len v hornej, resp. v spodnej, polovici. Avšak oni sa môžu nachádzať aj v strede, cez druhý a tretí riadok.
Takto tam môžu byť uložené len 2 alebo 4 dlaždičky, lebo pri 1, 3, alebo 5, nám v krajných riadkoch vídí vždy nepárny počet voľných štvorčekov, ktoré párnym obsahom dlaždičiek nevieme zaplniť.

Pre 2 zvislé dlaždičky:



Tieto sa zároveň dajú “preklopiť” cez polovicu, čím sa ich počet zdvojnásobí. *8.2 = 16*.

keď si prenesieme pomyselný „stred“ druhého šesťuholníka do hociktorého z vrcholov toho pôvodného. Takto nám vzniknú dva prekrývajúce sa šesťuholníky. Na tvorbu tohto útvaru sme využili 19 zápaliek, čo je najmenší možný počet.



Bodovanie: Za úplný postup ste mohli odstať 5 bodov. Pol bodu som vám strhávala, keď chýbalo nejaké drobné odôvodnenie (napríklad prečo je vhodný práve šesťuholník, atď.). 4 body dostali riešenia s neúplným alebo nie úplne správnym postupom. 3 bodmi boli obodované riešenia typu „skúšal(a) som a toto mi vyšlo najmenej.“ 2 body získali správne odpovede bez akéhokoľvek ďalšieho komentára. 1 – 1,5 bodu majú tí, ktorí mali riešenie síce nesprávne, ale uviedli aspoň nejakú správnu úvahu o postupe. 0,5 bodu som dala riešeniam, ktoré vychádzali z úplne chybných predpokladov (napríklad, že spojením 2 trojuholníkov získam štvorec a podobne) a teda boli nesprávne úplne.

Príklad M3: Knihy. *Opravovala Veronika „Veverička“ Sliačanová.*

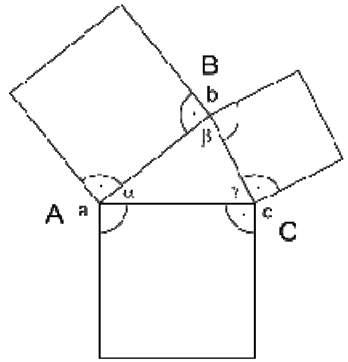
Prvým ťahom niekam musíme preložiť najmenšiu knihu, napríklad na druhý stolík. Druhým zase druhú najmenšiu na tretí stolík. V treťom ťahu nebudeme ťahať druhou najmenšou knihou (to sme robili v minulom ťahu), ani druhou najväčšou knihou (nemáme ju kam dať), preto presúvame najmenšiu knihu z druhého stolíka. A presunieme ju na tretí, lebo presun na prvý by bol neefektívny. Tak sme dve najmenšie knihy presunuli na 3 ťahy na tretí stolík. Teraz má zmysel presúvať iba druhú najväčšiu knihu na druhý stolík. Teraz presunieme dve najmenšie knihy na tri ťahy podobne, ako na začiatku tak, aby sme na druhom stolíku mali kôpku troch najmenších kníh, máme 7 ťahov. Teraz už len najväčšiu knihu presunieme na voľný stolík a pomocou 7 ťahov presunieme kôpku z 3 kníh. A spravili sme to na 15 ťahov.
Ak cudzinec pomáha, pôjde to rýchlejšie. Dano vezme najmenšiu a cudzinec prenesie druhú najmenšiu (nazvime takýto ťah „runda“). V ďalšej runde presunieme dve najväčšie knihy a v poslednej opäť dve najmenšie. To sú spolu tri rundy, teda spolu 6 ťahov.

Bodovanie: 5 bodov za správne riešenie.

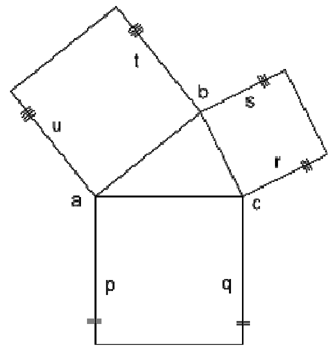
Príklad M4: Jaskyňa. *Opravoval Miško Szabados.*

Ako prvé si môžeme všimnúť, že úloha je geometrická a je k nej obrázok. Ono sa to možno nezdá, ale má to pár dôležitých dôsledkov.
Prvá dôležitá vec je tá, že obrázok je iba ilustračný. Slúži iba na to, aby sme si vedeli situáciu lepšie predstaviť, prípadne môže ešte označovať nejaké body a uhly (ako to bolo v tomto prípade). Preto akékoľvek pokusy o meranie uhlov alebo dĺžok strán nemajú zmysel. Proste obrázok je iba približný a musíme si s úlohou poradiť inak.

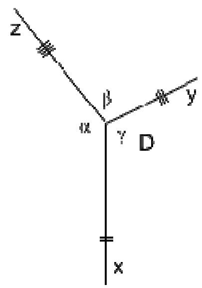
Teda my v skutočnosti nevieme, ako presne vyzerajú naše štvorce. To znamená, že ak si ich nejak zvolíme a pre tento konkrétny prípad niečo dokážeme, nič to neznamená. Čo s tým? Odpoveď je prostá – potrebujeme úlohu vyriešiť pre všetky možné prípady. To znie dosť hrozivo. Ale nebolo to až také ťažké, ukážeme si rovno dve riešenia.



1. riešenie: Najprv si označme vrcholy trojuholníka A, B, C. Tiež si označme jeho vnútorné uhly α, β, γ. Štvorec má všetky uhly pravé, do obrázka si zaznačíme aj to.
Označme plný uhol okolo bodu A ako ∠A, ten má veľkosť 360° (je to akoby celý „kruh“ okolo bodu A). My ale vieme, že $\angle A = a + 90° + \alpha + 90°$, pretože tieto uhly vypĺňajú celý priestor okolo bodu A. Teda $a + \alpha = 180°$. Podobne pre uhly okolo bodov B a C platí $180° = b + \beta$ a $180° = c + \gamma$.
Všetky tieto uhly majú teda dokopy veľkosť 540° (to, že to je viac ako plný uhol nás vôbec neznepokojuje). Lenže uhly α, β, γ sú uhly trojuholníka, čiže ich súčet je 180°. Teraz môžeme 180° odčítať a víťazoslávne dostávame, že $a + b + c = 360°$.



2. riešenie: Ukážeme si geometrickejšie riešenie. Viacerí z vás si všimli, že keby sme uhly a, b, c „poskladali“ k sebe, dostali by sme celý kruh, teda 360°. Ale ako sa to spraví poriadne? Nuž, takto.
Začneme zase tým, že si čo-to pooznačujeme. Nech p, q, r, s, t, u sú strany štvorca podľa obrázku. Keďže po dvojiciach sú to protiľahlé strany štvorca, sú navzájom rovnobežné. Konkrétne p || q, r || s a t || u. (kde p || q znamená, že p je rovnobežné s q.) Zvoľme si niekde bod D a veďme z neho 3 polpriamky x, y, z rozmiestnené podľa obrázku tak, že x je rovnobežná s p (a teda aj q), y je rovnobežná s r a s a napokon z je rovnobežná s t a u. Nakoniec ešte označme uhly medzi tými to polpriamkami α, β, γ.



Teraz si všimnime, že a = α. Je to tak, pretože p || x a zároveň u || z, a keď máme dvojicu rovnobežných priamok, aj uhly medzi nimi zovreté sú rovnaké. Podobne možno ukázať, že b = β a c = γ.
Lenže α + β + γ tvorí plný uhol 360° okolo bodu D.
Takže aj $a + b + c = 360°$.