Karol si zvolil násobky 3. Z nich už sú „voľné“ len tieto: **12, 15, 18, 24, 27 a 39** – čo je práve šestica.

Posledný komu treba prideliť čísla je Katka. Ona si zaškrtla prvočísla, ktorých súčet je 150. K dispozícií máme tieto prvočísla: 11, 13, 17, 19,23, 37 a 41. Ich súčet je 161 a teda z nich môžeme súčet 150 dostať jediným možným spôsobom a to keď použijeme čísla : **13, 17, 19, 23, 37, 41**

Takýmto spôsobom sme zaškrtali 43 čísel (ak rátame aj dodatkové číslo 1) a teda nám ostalo posledných 6, ktoré sú práve hľadanou výhernou šesticou. Sú to teda:

11, 20, 22, 26,38,40.

Príklad M5: Hracia kocka. *Opravovala Nina Kuklišová.*

Pri štvorčekovej sieti 5x3 vedie najkratšia cesta z ľavého dolného rohu do pravého horného rohu cez 6 políčok okrem začiatočného. Jednoduchým skúšaním, vypisovaním, kreslením, dokážeme zistiť, že takýchto ciest je práve 15. V prípade, že si ich vyskúšate všetky, zistíte, že v poslednom políčku ste mohli dostať všetkých 6 čísel, ktoré sa nachádzajú na kocke.

Tak sa pozrime na všetky možné cesty. Políčka sú očíslované, každú trasu máte uvedenú ako políčka, po ktrorých prejdete, posledné podčiarknuté číslo je to, ktoré dostanete na poslednom políčku. Začíname na políčku 1 a končíme na 15. Za každou cestou máte uvedený počet bodiek na vrchu kocky v cieľovom políčku . Možné trasy vedú cez políčka:

11	12	13	14	15
6	7	8	9	10
1	2	3	4	5

1. 1,6,11,12,13,14,15 - 6
2. 1,6,7,12,13,14,15 - 3
3. 1,6,7,8,13,14,15 - 1
4. 1,6,7,8,9,14,15 - 3
5. 1,6,7,8,9,10,15 - 6
6. 1,2,7,8,13,14,15 - 2
7. 1,2,7,8,9,14,15 - 1
8. 1,2,7,8,9,10,15 - 5
9. 1,2,3,8,9,10,15 - 1
10. 1,2,3,8,9,14,15 - 4
11. 1,2,3,8,13,14,15 - 6
12. 1,2,7,12,13,14,15 - 1
13. 1,2,3,4,9,10,15 - 2
14. 1,2,3,4,9,14,15 - 1
15. 1,2,3,4,5,10,15 - 6

Bodovanie: Na získanie plného počtu bodov stačilo prísť na to, že môžeme dostať všetky čísla, a nakresliť aspoň jednu cetu ku každému číslu. Ak ste mali menej možností, ale mali nakreslené, ako ich môžete dostať, dostali ste menej bodov; body som taktiež strhávala, ak ste neukázali, ako ste k týmto možnostiam prišli.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára

PIKOMAT, 25. ročník šk. rok 2007/2008

PIKOMAT

Vzorové riešenia 4. série, kategória 5-6

Príklad M1: Schody. *Opravovala Alica Nagyová.*

Vzorové riešenie inšpirované Eduardom Batmendijnom a Filipom Šramkom:

Výstup na schody môžeme zapísať ako zhluk jednotiek a dvojok, pričom jednotka znamená krok, ktorým vyjdeme jeden schod a dvojka krok, ktorým vyjdeme 2 schody naraz. Čísla budú v takom poradí, v akom budú aj kroky, ktoré reprezentujú. Keďže potrebujeme vyjsť po ôsmych schodoch, súčet čísel sa bude rovnať 8.
8 − súčet dvojok = súčet jednotiek

Medzi číslami môžu byť maximálne 4 dvojky, pretože inak by súčet čísel presahoval 8.
4 dvojky: 8 − 4.2 =0, teda 0 jednotiek a 4 dvojky, je iba **jediná možnosť** ako usporiadať takúto kombináciu čísel: 2222

3 dvojky: 8 − 3.2 = 2, teda 2 jednotky a 3 dvojky, medzi troma dvojkami máme 4 pozície (∗2∗2∗2∗), keď na prvú pozíciu vľavo položíme jednotku, zostávajú nám ešte 4 ďalšie pozície pre druhú jednotku (medzi prvou jednotkou a dvojkou a zvyšné 3 hviezdičky) → **4 možnosti**. Keď jednotku položíme na druhú pozíciu, napravo od nej nám zostávajú už len 3 pozície (naľavo nemôžeme položiť jednotku, tú možnosť už máme)=>**3 možnosti**. Jednotka na tretej pozícii poskytne už len **2 ďalšie možnosti** a **poslednú možnosť** pre tento prípad predstavujú dve jednotky na konci. (**4+3+2+1=10 možností**)

2 dvojky: 8 − 2.2 = 4, teda 4 jednotky a 2 dvojky, medzi 4 jednotkami máme 5 pozícií (∗1∗1∗1∗1∗). Úvaha je podobná ako v predchádzajúcom bode. Rozdiel je v tom, že hľadáme pozície dvom dvojkám a máme nazačiatku 5 pozícií. Súčet možností bude v tomto prípade **5+4+3+2+1=15**.

1 dvojka: 8 − 2 = 6, teda 6 jednotiek a 1 dvojka, medzi 6 jednotkami máme 7 pozícií (∗1∗1∗1∗1∗1∗1∗). Dohromady 7 možností kam položiť jednu dvojku a teda **7 možností** pre tento prípad.

žiadna dvojka, teda 8 jednotiek, iba **jediná možnosť**: 11111111
Súčet spôsobov ako sa dá prejsť 8 schodov je **1+10+15+7+1=34.** Zaujímavú myšlienku mal aj Aleš Šuster, ktorý rozlišoval aj krok ľavou a pravou nohou. Pri ich pravidelnom striedaní, získame dvojnásobok spôsobov **68**.

Ešte tabuľka všetkých zhlukov:

2222
11222, 12122, 12212, 12221, 21122, 21212, 21221, 22112, 22121, 22211
221111, 212111, 211211, 211121, 211112, 122111, 121211, 121121, 121112, 112211, 112121, 112112, 111221, 111212, 111122
2111111, 1211111, 1121111, 1112111, 1111211, 1111121, 1111112
11111111

Bodovanie: V tomto príklade bola pre mňa najdôležitejšia **základná myšlienka:** ako nájsť naozaj všetky riešenia a nezabudnúť na žiadne. Pri opravovaní a mojich komentároch som ju zväčša nazývala „princíp“ alebo „systém“, mohli ste zaň dostať maximálne **3 body**. (Ak ste mali použitý správny, ale nie slovne vysvetlený, stiahla som 1 bod.) Za konkrétne možnosti (**prevedenie základnej myšlienky**), ktoré ste vypísali, bolo maximum **1,5 boda** (hodnotenie záviselo teda od toho či, a koľko spôsobov vám chýbalo). Zvyšok, **0,5 boda,** bol za **konečný výsledok**, t.j. správne spočítanie všetkých možností.
0,5 až 1 bod som ešte z celkového hodnotenia stiahla, ak pri vašom riešení nebola zrejmá súvislosť so zadaním.

Príklad M2: Hodiny. *Opravovala Katka „katyika“ Beláková.*

Aby som si bola istá, že moje riešenie bude úplné a správne, musím si zvoliť taký postup, aby som na žiadny prípad nezabudla. Tak si prejdem všetky možnosti ako môže odbiť zvon pri prvom počutí.

Ak prídem ku kostolu a začujem hodiny odbiť 4,5,6,7,8,9,10,11 alebo12-krát, hneď viem koľko je hodín. V takomto prípade čakám najviac 15 minút (ak prídem hneď po predošlom odbití). Pomýliť ma môžu len 1,2 alebo 3 odbitia. Tak sa na ne pozrime.

1. Prídem ku kostolu a odbije raz. To môže znamenať, že je jedna hodina alebo štvrť na niekoľkú. Tak čakám ďalších 15 minút. Ak odbije znova raz, už viem, že je štvrť na dve. Teda som čakala 30 minút. Ak odbije dva-krát, je pol niekoľkej, musím čakať ďalej. Potom odbije tri-krát (je trištvrte) a nakoniec odbije na celú. V tejto chvíli už viem, koľko je hodín. Čakala som najviac 60 minút (to vtedy, keď prídem tesne po celej).

2. Ak počujem najprv dve odbitia, môžu byť buď dve hodiny alebo pol. Ak potom odbije raz, znamená to, že je štvrť na tri. Čakala som 30 minút. Ešte môže odbiť tri-krát. Vtedy je trištvrte a pri ďalšom odbití zistím, koľko je hodín. Čakala som 45 minút.

3. Pri troch odbitiach môžu byť tri hodiny alebo trištvrte. Ak po chvíli odbije 2,3,4,5,6,7, 8,9,10,11 alebo 12-krát, viem že bolo trištvrte. Čakala som 30 minút. Ak odbije raz, ešte neviem presný čas (môže byť štvrť na štyri, ale aj jedna hodina). To sa dozvieme podľa toho, či ďalej odbije raz alebo dva razy. Čiže čakám maximálne 45 minút.
Teraz sa už stačí len sa pozrieť, ktorý čas je najdlhší. Je to 1 hodina.

Bodovanie: Za správny výsledok 1 bod a za stupeň zdôvodnenia a počtu preskúmaných prípadov 1 až 4 body. Za neprirátanie času pred prvým zvonením a nejasnosti som strhávala 0,5 boda.

Poznámka k riešeniam: Uznávala som aj časy iné ako 60 minút (napr. 59minút a 59 sekúnd), ak boli dobre zdôvodnené. Pre riešenie príkladu je nepodstatné ako dlho trvá odbitie. Taktiež aj to, či je doobeda alebo poobede. Na to sa v zadaní nepýtame.

Príklad M3: Voľby. *Opravoval Pavol Cvik.*

Pokiaľ chceme, aby Austrálčania získali všetky miesta vo výbore, musia títo Austrálčania dostať viac hlasov ako ich protivníci. Najväčší rivali Austrálčanov sú Novozélenďania, pretože majú druhé najvyššie zastúpenie v rade. Najvyššiu šancu pokaziť Austrálčanom plány na ovládnutie celého výboru majú práve oni a to keby hlasovali všetci za rovnakých šiestich členov. Takto by získali maximum z možných hlasov a mali najvyššiu šancu vytlačiť Austrálčanov z výboru. Takže, pokiaľ všetci Novozélanďania budú hlasovať za tých istých 6 členov, títo šiesti členovia budú mať potom 17 hlasov, pretože toľko je Novozélanďanov v miestnej rade.

Takže ak majú Austrálčania získať všetky miesta vo výbore, potrebujú, aby aspoň 10 Austrálčanov malo aspoň 18 hlasov (musia mať viac ako Novozélanďania).
Spolu majú Austrálčania 30x6=180 hlasov. A potrebujú pre 10 členov 18 hlasov, takže by to malo ísť. Aby sme príklad úspešne dokončili, potrebujeme ešte ukázať, že naozaj existuje taký spôsob hlasovania, aby 10 Austrálskych členov získalo 18 hlasov. Takých spôsobov existuje veľa, nám stačí nájsť jeden. Napríklad tento:

Označme si Austrálskych členov rady číslami 1-30 s tým, že budú chcieť zvoliť čísla 1-10.
Prví piati zahlasujú nasledovne:
1. hlasuje za 1, 2, 3, 4, 5, 6.
2. hlasuje za 7, 8, 9, 10,1, 2.
3. hlasuje za 3, 4, 5, 6, 7, 8.
4. hlasuje za 9, 10, 1, 2, 3, 4.
5. hlasuje za 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Každý z členov 1-10 má zatiaľ 3 hlasy. Hlasovalo zatiaľ 5 ľudí. Ešte nám ostalo 25 ľudí. Ak ich rozdelíme na skupinky po piatich a tí budú hlasovať tak ako táto prvá skupina, tak každý z členov 1-10 bude mať na konci 3x6=18 hlasov.

Bodovanie: Najviac tri body ste mohli získať ak vám chýbal spôsob hlasovania. Najviac 2,5b ste mohli získať za systém ale bez zdôvodnenia, že takéto hlasovanie stačí na získanie všetkých miest. Za správne riešenie bolo 5b.

Príklad M4: Športka. *Opravovala Lenka „Lenika“ Bendová.*

Na začiatku máme čísla od 1 po 49 s tým, že o jednotke vieme že je dodatkovým číslom a teda nikto ju nemal zaškrtnutú. Najvýhodnejšie je začať číslami, ktoré sú násobkami rovnakých čísel- teda druhými mocninami (1.1) **1**, (2.2) **4**, (3.3) **9**, (4.4) **16**, (5.5) **25**, (6.6) **36**, (7.7) **49.** Keď vyradíme už použitú jednotku, ostane nám 6 čísel, teda tipovaná Kamilova šestica.

V číslach od 1 po 49 je práve 7 násobkov sedmičky (teda 7 možných Karolíniných tipov): **7, 14, 21, 28, 35, 42, 49**.Keďže 49 sme už použili, ostáva nám práve jej zaškrtnutá šestica.

Kika si vybrala 6 čísel tak, že najvyššie z nich je 10, pri tom 1, 4, 7 a 9 už sú použité. Ostáva teda 6 čísel: **2, 3, 5, 6, 8 a 10**.

Konrád a Klaus hľadali zaškrtli 6 po sebe idúcich čísel. Teraz máme len 2 takéto šestice a to: **29, 30, 31, 32, 33, 34** a **43, 44, 45, 46, 47, 48**. Keďže Klausove čísla boli väčšie ako Konrádove, tak mu patrí druhá a Konrádovi prvá šestica.