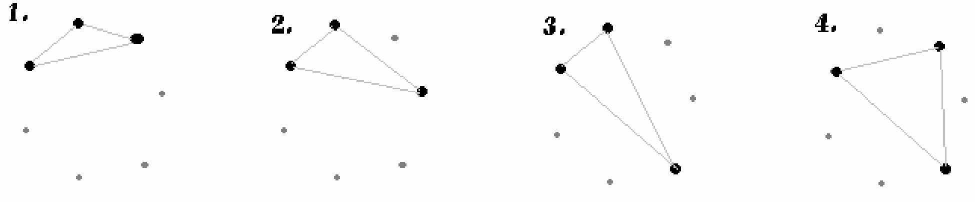
Príklad M5: Stratené stĺpy *opravovala Michaela „Myšička“ Němcová*

Možností riešenia bolo viac, ale ja uvediem len jedno, ktoré považujem za najjednoduchšie:
Najprv museli draci zistiť ako sú tie 3 stĺpy rozostavené. Existujú 4 základné možnosti, ostatné sú len otočením alebo stranovým prevrátením z nich:



Začneme tým, že si všimneme, že trojuholník 2 je jediný, ktorý nie je rovnoramenný. Teda ak draci vidia nerovnoramenný trojuholník, bol to ten na obrázku 2. Ak vidia rovnoramenný, tak si všimnú, či je tupouhlý. Ak je, tak ide o trojuholník 1. Ak nie je, tak si všimnú dĺžku ramien. Ak je rameno dlhšie jako základňa, tak je to trojuholník 3. Ak nie, ostal nám len trojuholník 4.
V trojuholníku zo známych stĺpov ďalej draci spravili opísanú kružnicu - na nej musia ležať aj zvyšné body pravidelného 7-uholníka (pravidelný 7-uholník má opísanú kružnicu a kedže trojuholník má práve jednu opísanú kružnicu, musí to byť tiež opísaná kružnica nášho 7-uholníka). Na ľubovoľné 2 strany trojuholníka spravili draci kolmicu v ich strede, a kde sa tieto 2 kolmice pretli, tam je stred kružnice (označme si ho S). Polomer kružnice je vzdialenosť bodu S od ktoréhokoľvek z bodov.
Ak sú stĺpy rozostavené ako na obrázkoch 1, 2 a 3 draci jednoducho naniesli najkratšiu spojnicu po obvode kružnice a tým zakončili svoje dielo. V prípade 4 nanášali najkratšiu vzdialenosť tohoto trojuholníka po obvode kružnice (aj viackrát, ak je to treba), kým nemali určené všetky body.

Bodovanie: Návrh riešenia: 3b, postup: 2b

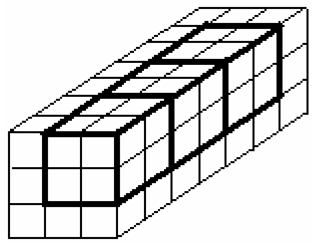
PIKOMAT ,23. ročník šk. rok 2005/2006

organizátor korešpondenčného seminára podporuje odborný rast organizátorov seminára

Vzorové riešenia 1. série ketegórie 5-6

Príklad M1: Kocky *opravoval Peter „Mitec“ Miťko*

Úloha by sa na prvý pohľad dala riešiť dvoma spôsobmi. Ale jeden z nich neviedol k správnemu výsledku – ukážem prečo.
Prvý spôsob spočíval v tom, že ak sme si chceli kváder s objemom 63 cm^3 nakresliť, museli sme poznať veľkosti jeho hrán. Vedeli sme, že kváder mal objem, ako 63 malých kociek. Preto jeho hrany museli byť prirodzené čísla (inak by sme používali napríklad aj „pol-kocky“). Potrebujeme teda nájsť všetky čísla, ktoré delia hodnotu 63. Najrýchlejším spôsobom je nájsť všetky delitele čísla 63 cez prvočíselný rozklad. Ten je nasledovný: 3.3.7 = 63. Všetky delitele 63-ky potom budú: 1,3,7,9,21,63. Z nich môžeme vytvoriť nasledovné trojice hrán: 1,1,63; 1,3,21; 1,7,9 a 3,3,7 (zvyšné vzniknú len poprehadzovaním týchto čísiel medzi sebou v trojiciach – napríklad 3,7,3; takže nám stačí uvažovať len predchádzajúce 4 trojice). Jediná možnosť, ktorá nám vyhovuje je posledná trojica, pretože prvé 3 majú aspoň jednu hranu veľkosti 1 cm a do takého kvádra nevieme umiestniť ani jednu kocku s hranou 2 cm. Hrany s veľkosťou 3 cm môžu obsahovať najviac jednu dĺžku 2 cm. Hrana s veľkosťou 7 cm ich môže obsahovať najviac 3 (7:2 = 3, zv. 1). Na obrázku je to ešte názornejšie.



Druhý spôsob spočíval v tom, že si vypočítame objem kocky s hranou 2 cm a zistíme, koľko krát sa tento objem v kvádri môže nachádzať. Objem kocky je 8 cm^3 (2 cm x 2 cm x 2 cm) a do kvádra sa zmestí 63:8 = 7 a zv. 7. Kváder s objemom 63 cm^3 vieme teda vytvoriť pomocou najviac 7 <u>útvarov</u> s objemom 8 cm^3 a najmenej 7 kociek s hranou 1cm. Prečo som napísal útvarov a nie kociek? Skúste umiestniť do nášho kvádra 7 kociek s hranou 2 cm. Sami vidíte, že to nejde.
Mnohí z vás ste používali nesprávne termíny pre označovanie častí kvádra: kváder má 6 stien, 12 hrán (nie strán), 8 vrcholov. Má plochu a objem. Obsah majú len jeho steny.

Bodovanie: Za správnu odpoveď ste mohli dostať 1 bod, ak ste určili, že do kváder môže obsahovať najviac 3 kocky s rozmerom 2 cm a ak ste napísali, že ich môže byť aj menej, tak ste dostali 0,5 b. Za určenie a dostatočné zdôvodnenie, prečo bude mať kváder hrany 3 cm, 3 cm, 7 cm ste dostali 0 až 2 body. Za správny postup, prečo to môžu byť najviac 3 kocky, ste dostávali 0 až 1,5 bodu. V prípade, že ste určili, že kociek bolo najviac 7, mohli ste dostať najviac 2,5 bodu.

Príklad M2: Míľniky *opravoval Martin „Panda" Svetlík*

V prvom rade si povedzme, čo vlastne hľadáme, pretože zopár riešiteľov hľadalo míľnik, ktorý má dve rovnaké cifry a medzi nimi nulu (svojské pochopenie slovného spojenia „míľnik s rovnakými ciframi, ibaže bude medzi nimi ešte cifra nula"). Nie, my hľadáme míľnik, ktorý má rovnaké čísla ako tie dva ďalšie, a medzi nimi je tá nula. Čiže nie 101.
Označme si cifry v míľnikoch ako „x" a „y". Prvý míľnik má potom číslo *xy*, ten s opačnými ciframi *yx* a ten, za ktorým majú odbočiť *x*0*y* alebo *y*0*x* (na toto väčšina z vás zabudla – nie je písané v akom poradí sú jeho cifry, len že v strede je nula). Musí platiť, že x < y, pretože keby x = y, tak by sa nepohli z miesta, a ak by bolo x > y, druhý míľnik by mal menšie číslo ako prvý a vlastne by cúvali (a keďže prvé dva majú dvojciferné čísla a tretí trojciferné, musia sa pohybovať dopredu). Keby sme si aj zobrali najväčší možný rozdiel medzi dvoma dvojcifernými číslami (99 – 10 = 89), a pripočítali ho hoci aj k najväčšiemu dvojcifernému číslu, nedostaneme číslo väčšie ako 200 (99 + 89 = 188). To znamená, že míľnik, za ktorým majú odbočiť, bude mať číslo od 100 (keďže má byť trojciferné) do 188, a teda určite je tam cifra 1. Cifra 1 môže byť na prvom míľniku len na prvom mieste („x"), lebo inak by neplatilo x < y („01" za dvojciferné číslo nepovažujeme). Čiže 1 je na prvom aj treťom míľniku na 1.mieste a teda tretí míľnik musí mať tvar x0y, čiže 10*y*. Čísla s ciframi 1*y* a 10*y* sa vlastne rovnajú 10 + y a 100 + y, a teda ich rozdiel je 90 a medzi prvým a tertím míľnikom je 90 míľ (preto sa to volá míľnik :). Keďže to majú byť dva rovnaké kusy cesty, tak úseky od 1. po 2. míľnik aj od 2. po 3. míľnik majú po 45 míľ. Keď k číslu 1*y* (12 až 19, lebo 10 a 11 sme už vylúčili) pripočítame 45, máme dostať *y*1 (úsek 1.-2. míľnik). Keďže 12 + 45 = 57 a 19 + 45 = 64, tak číslo *y*1 je práve medzi 57 a 64, a ak má byť jeho druhá cifra rovná 1, tak je to 61 – to je druhý míľnik. Čiže míľniky majú čísla 16, 61 a 106. Zabočia teda za 106. míľnikom.

Bodovanie:
a) Výsledok 106 – 1b., ďalšie 2,5b za postup nájdenia prvého míľnika z možností 10-19, ďalší 1b za vylúčenie čísel prvého míľnika 20-99, ďalší 0,5b za vylúčenie tretieho míľnika v tvare *y*0*x*.
b) Rovnica + výsledok 106 + úplný postup – 4,5b, ďalší 0,5b za vylúčenie tretieho míľnika v tvare *y*0*x*.
c) Toto som sa rozhodol tiež bodovať, pretože to tak riešilo asi 10% ľudí. Bohužiaľ to nie je plnohodnotný výsledok, a preto som hodnotil nasledovne: výsledok 101 aj s míľnikmi 47 a 74 – 1 bod. Úplný postup k týmto číslam – 2 body.

Príklad M3: Prievozníka-podvodníka *opravoval Peter „Pepe" Kóša*

Tento príklad sa vám riešil najlepšie tak, že ste si uvedomili, čo sa stane s dračími šupinami po každej míli. Nech je šupín na začiatku x. Keďže sa šupiny najprv zdvojnásobia a potom ich 24 zaplatia, môžeme si napísať, koľko ich mali po jednej míli ako 2x – 24. Keďže po druhej míli sa udeje so šupinami to isté, namiesto x dosadíme do prvého výrazu taký istý, čím dostávame 2(2x - 24) - 24. Toto isté spravíme aj pre tretiu míľu a vznikne nám peknučký výraz 2(2(2x - 24) - 24) - 24. Keďže im na koci zostalo 0 šupín, tak to dáme do rovnice 2(2(2x - 24) - 24) - 24 = 0. No a potom už len postupnými úpravami dostaneme kýžený hľadaný výsledok x = 21.

Bodovanie: Za správny výsledok ste dostali 2 body, ak ste teda nepovedali, že "tipla som si". Za riešenie typu vyskúšal som všetky čísla od 1 do 25 som síce nerád, ale dal plný počet. Za chýbajúci pokec ste body stratiť samozrejme mohli.

Príklad M4: Vodného draka *opravoval Mišo Kováč*

Takmer všetci ste túto úlohu vedeli vyriešiť. Riešilo sa to prelievaním. Niektorí ste našli jedno riešenie, niektorí dve alebo tri. Samozrejme, že prelievať vodu medzi vedrami môžeme ľubovoľne dlho, preto je ľubovoľne veľa riešení. Tak sa pozrime na to, že koľko tých základných riešení je v skutočnosti. Keď naberieme vodu do vedra, tak sa nám neoplatí ju všetku vyliať z toho vedra. Riešenia si môžeme roztriediť podľa toho, či použijeme dve, alebo všetky tri vedrá.
<u>*Ak použijeme dve vedrá:*</u>
Skúsme 6 a 10: Prelievaním môžeme dostať vždy len vodu s párnym objemom (skúste si ukázať sami), teda nikdy nedostaneme objem 1 pintu. Ak použijeme 6 a 15, objem bude vždy deliteľný číslom 3 (tiež úloha pre vás), a ak použijeme 10 a 15, bude objem deliteľný číslom 5 (a znovu:-). To znamená, že dve vedrá nám nestačia.
<u>*Použijeme všetky tri vedrá:*</u>
Tieto riešenia sa dajú rozdeliť podľa toho, či budeme naberať len do jedného vedra, alebo do dvoch. Z tých zvyšných budeme vždy vylievať.
<u>Začnime naberaním do dvoch vedier.</u>
6 a 10: Naberieme vodu do týchto dvoch vedier. Prelejeme ich do 15-pintového vedra a zvýši sa nám 1 pinta. Niektorí ste tu našli dve riešenia – podľa poradia, ale to je v podstate iba jedno riešenie.
6 a 15: Naberieme vodu do obidvoch vedier. Prelejeme do 10-pintového vedra, ktoré vylejeme a následne znova naplníme z pôvodných vedier, kde ostane 1 pinta.
10 a 15: Naberieme vodu do obidvoch vedier a štyrikrát z nich odoberieme do 6-pintového vedra, ktoré vždy vylejeme. Ostane 1 pinta.
<u>Keď budeme naberať iba do jedného vedra</u>:
6: Spolu naplníme toto vedro šesťkrát. Budeme ich prelievať postupne do15, 10 a 10-pintového vedra doplna, teda ostane 6*6-15-10-10=1 pinta.
10: Toto vedra celkovo naplníme štyrikrát a odlejeme postupne do 6,6,6,6 a 15-pintového vedra. Ostane 4*10-6-6-6-6-15=1 pinta.
15: Toto vedro naplníme spolu trikrát. Postupne ich prelejeme do 6,6,6,6,10 a 10-pintového vedra a ostane 3*15-6-6-6-6-10-10=1 pinta.
Ostatné riešenia vzniknú kombináciami týchto šiestich základných riešení.

Bodovanie: Za nájdenie jedného riešenia ste dostali 3 body. Keď ste našli riešenia dve, dostali ste 4 body, a najlepší, ktorí našli až tri riešenia, dostali bodov 5. Bohužiaľ, nikto nenašiel riešenia, v ktorých sa naberá 1 vedro a z dvoch sa vylieva. Za slovný popis a úvahy som pridával od –1bodu po 1 bod.