Príklad M5: ***Trestnú úlohu*** *opravovala Kami Vyslocká*

Nechajme otvorenú otázku, či existuje nejaké rozmiestnenie, pretože toto nie je podľa zadania žiadané.

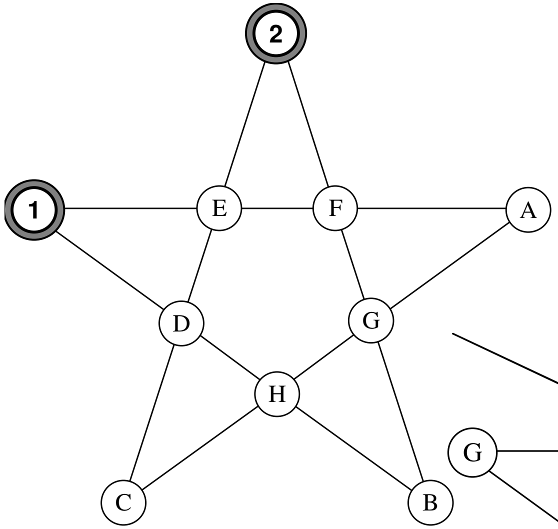
a) Lua povedala: „Čísla 1 a 2 MUSIA byť v cípoch hviezdy, ktoré sú vedľa seba.“

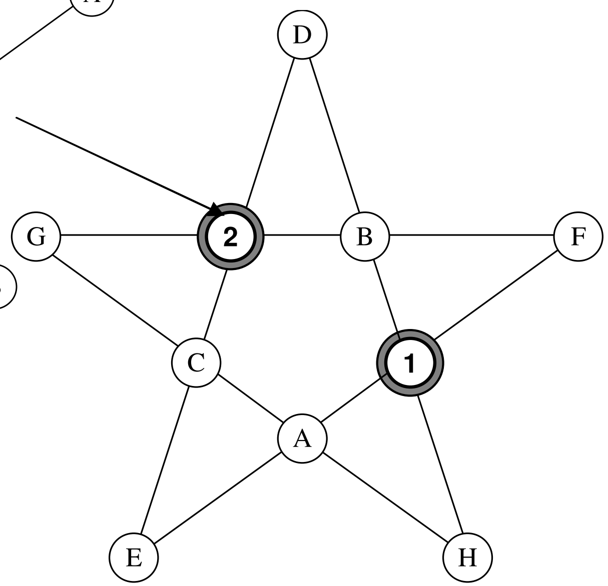
Lua nemá pravdu. Pretože ak máme rozmiestnenie v ktorom **sú** 1 a 2 v cípoch, ktoré sú vedľa seba, vieme čísla preusporiadať tak, aby už **neboli** a pritom sa súčet na hranách nezmenil. Všimnime si: na prvom obrázku je súčet na hranách: 1 + E + F + A, 2 + F + G + B, A + G + H + C, B + H + D + 1, C + D + E + 2. Na druhom obrázku je súčet na hranách H + 1 + B + D, F + B + 2 + G, D + 2 + C +E, G + C + A + H, E + A + 1 + F. Ak si to pozorne pozrieme, je to to isté (len v inom poradí). Teda nie je pravda, že 1 a 2 MUSIA byť v cípoch hviezdy, ktoré sú vedľa seba.

b) Miňo povedal: „Súčet musí byť 24.“

Miňo nemá pravdu. Súčet čísel na piatich hranách je 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7 + 7 + 8 + 8 + 9 + 9 + 10 + 10 = 110. (Pretože každé číslo sa nachádza na dvoch hranách.) Keďže na každej hrane má byť súčet rovnaký, bude to 110 : 5 = 22. Súčet musí byť teda 22.

Bodovanie: Ak ste napísali, že Lua klame, získali ste jeden bod. Ak ste aj vysvetlili prečo nie je pravda, že 1 a 2 musia byt v cípoch, ktoré su vedľa seba, tak ste dostali este 1,5 boda. Ak ste napísali, že Miňo klame, získali ste jeden bod. Ak ste aj vysvetlili, precč nie je pravda, že súčet je 24 a Miňov výrok aj opravili, tak ste dostali ešte 1,5 boda.





P-MAT n. o.
organizátor korešpondenčného seminára

NADÁCIA INGENIUM
podporuje odborný rast organizátorov seminára

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti kategórie 5-6

Príklad M1: ***Geniálnu studňu*** *opravoval Michal Kováč*

Správne riešenie je 13. Hodíme 3, 3, 3, 2, 2 v ľubovoľnom poradí. Ale ešte treba dokázať, že to nejde na menej. Najprv si uvedomíme, koľko kameňov sa oplatí hádzať v jednej skupine, ak to chceme spraviť lepšie, ako na 13.

Ak by sme naraz hodili **12, 11, 10, 9, 8, 7,** bolo by ich výhodnejšie hodiť v troch skupinách 2, 2, 3, lebo 2.2.3=12 a 2+2+3=7, čo je oveľa výhodnejšie, ako naraz hodiť 7 až 12. Ak by sme v jednej skupine hodili **6, 5:** výhodnejšie je 2.3 z toho istého dôvodu. **4** je rovnako dobré, ako 2.2, ale dvojky sú flexibilnejšie. Ostáva nám teda kombinovať len 2 a 3, lebo to sa ukazuje z hore uvedeného postupu ako najvýhodnejšie. Ale znova sú výhodnejšie 3, lebo 2.2.2 sa dá nahradiť 3.3 a 8 je menej ako 9. Preto budem násobiť len trojkami, a keď dosiahnem viac ako 100, pouvažujem, či by sa nedala jedna alebo dve trojky nahradiť dvojkami. Viac ako dve dvojky tam nebudú, lebo sme si ukázali, že 8 je menej ako 9. 3.3.3.3.3 = 243, 3.3.3.3.2 = 162, **3.3.3.2.2 = 108.**

Bodovanie: Za správne riešenie 3.3.3.2.2=108 bol 1,5 bodu, tento príklad sa hodnotil zväčša podľa postupu. Mohlo sa kľudne stať, že niekomu vyšlo 14 kameňov a má viac bodov ako ten, čo má 13, záležalo na postupe. Veľa riešiteľov si v zadaní nevšimlo pred číslom 100 slovíčko „aspoň“, teda im vyšlo 14. Tí keď mali dobrý postup, mohli získať maximálne 3 body.

Príklad M2: ***Majetného deduška*** *opravoval Grigorij Griša Mesežnikov*

Základná myšlienka spočívala v pohraní sa s deliteľnosťou. Keďže jednoduché pravidlo na deliteľnosť siedmimi nepoznáme, bolo to o to zaujímavejšie (ťažšie). Začať riešiť tento príklad by sme mohli úplne sedliackym jednoduchým rozumom: Poďme si vypisovať postupne také čísla, aké si písal deduško; deľme ich číslom 7 a sledujme, či si niečo zaujímavé všimneme: (skončíme, keď natrafíme na prvé číslo deliteľné 7)

1 / 7 = 0 zv.1; 12 / 7 = 1 zv. 5; 122 / 7 = 17 zv.3; 1 221 / 7 = 174 zv.3.; 12 212 / 7 = 1 744 zv.4; **122 122 / 7 = 17 446 zv.0**.

Všimli sme si, že prvé vyhovujúce číslo, ku ktorému dospel aj deduško je 122 122. Máme teda jedno (prvé) riešenie.

Teraz si musíme uvedomiť najpodstatnejšiu vec, ktorú ste nie všetci vo svojich riešeniach vedeli správne formulovať. A veľakrát ste to aj zanedbali. Je to na pohľad jasné, ľahké, zrejmé, ale podstané spomenúť.

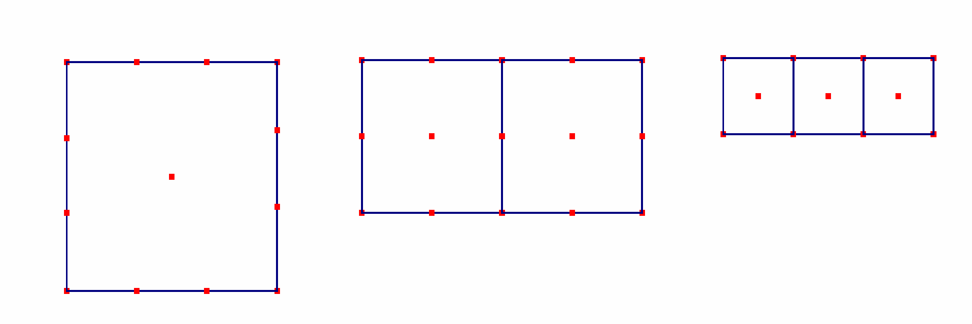
Keby sme začali pripisovať opäť cifry:1, 12, 122, 1221... atď. za číslo 122 122, tak, ako ich pripisoval aj deduško, a šli deliť celé nové číslo, znova by sme dostávali rovnakú situáciu ako na začiatku celého dlhého čísla. Pretože sa jedná len o pridanie nového cyklu delenia končiaceho po 6. cifre, pretože po šiestej cifre sme dostali zvyšok nula.

Zistili sme teda, že vždy pridávame ucelené jednotky – šesťčíslie 122 122, ktoré sú samostane deliteľné 7 a zároveň si dobre uvedomujeme, že čiastkové čísla z tohto šesťčíslia (1, 12, 122, 1 221, 12 212) nie sú deliteľné 7.
Už si stačí zrátať, koľko takých šestčíslí je v 99 cifernom zápise. Je to samozrejme 99 / 6 = = 16 zv.3. Zvyšok nám len hovorí, koľko cifier je navyše za 16 šesťčísliami, ktoré nás vôbec nezaujímajú.
Šestnásťkrát počas deduškovho písania, bolo číslo, ktoré bolo práve napísané na papieri, deliteľné siedmimi.
Bodovanie: 5 bodov za správne vyriešenie úlohy s aspoň nejakým pokusom o vysvetlenie, prečo vždy pridávame práve celé šesťčíslie 122 122. Menej bodov za chyby – množstvo strhnutých desatín bodov závisí na veľkosti a závažnosti chyby. 0 bodov za iné (nesprávne) riešenie.

Príklad M3: ***Kruštvoru*** *opravoval Ľubor Illek*
Keďže kým sú na tabuli aspoň 2 útvary, ťahať sa dá vždy (lebo na všetky 3 možnosti: □○,□□,○○ máme pravidlo), a preto hra vždy skončí. Ľubovoľným ťahom sa počet kruhov na tabuli môže zmenšiť o 2 (○○→□) alebo o 0 (□□→□,□○→○), preto sa nezmení ich parita – t.j. keď na začiatku bol párny počet kruhov (14), po každom ťahu ich bude opäť párny počet. Preto nikdy nemôže vzniknúť stav, že na tabuli ostane 1 kruh (to je nepárne číslo), takže Lua nikdy nevyhrá.
Z toho vyplýva, že nezáležiac na tom kto začína, a dokonca nezálžiac na tom ako hráči ťahajú, vždy vyhrá Miňo.
Poznámka: hra mohla prebiehať dovedna 154 spôsobmi.
Bodovanie: Vysvetlenie, ktoré zahŕňa všetky spôsoby hry, bolo za 5 bodov. Ak ste to zdôvodnili pre niekoľko možných partií, tak máte 2,5 boda. Ak ste aspoň nejako zdôvodnili, že vždy vyhrá Miňo, tak máte 1 bod. Ak vám v riešení chýbalo zdvôvodnenie dôležitej úvahy, tak som strhával 0,5 až 2 body.

Príklad M4: ***Pásavičkové ohrádky*** *opravovala Lucka Ambrošová*
Vieme, že farmár chce ohradiť 1 väčší, 2 menšie, alebo 3 najmenšie pozemky. Kôl má byť určite v každom rohu:

1. typ pozemku: (aspoň 12 kolov) **2. typ pozemku:** (aspoň 13 kolov) **3. typ pozemku:** (aspoň 8 kolov)



Keďže ohradené pozemky majú byť rôzne veľké, toto je najúspornejší spôsob ako sa dajú koly rozmiestniť. Zároveň je to jedno z riešení tohto príkladu. V zadaní totiž nebolo presne napísané, že počet použitých kolov musí byť rovnaký pre všetky tri typy pozemkov. Preto nám stačí 13 kolov.
Druhé riešenie je založené práve na predpoklade, že na všetkých typoch pozemku musíme použiť rovnaký počet kolov. Všimnite si:
1. typ pozemku má 4 rohy a 4 strany
2. typ pozemku má 6 rohov a 7 strán
3. typ pozemku má 8 rohov a 10 strán

Je teda jasné, že hľadané číslo musí byť deliteľné 4 (1. typ), ale ako je to so zvyšnými pozemkami?
V každom rohu 2. typu pozemku musí byť 1 kôl, čo je spolu 6 kolov. Nemôžme však pridávať po jednom kole, pretože by sme zákonite porušili rovnaké rozdiely medzi kolmi. Preto jediný spôsob ako môžme nejaké tie koly pridať, je zväčšiť každú stranu o 1 kôl, teda celý útvar o 7 kolov. Podobne je to aj v 3. type pozemku: v rohoch je 8 kolov a pridávame po desať (na každú stranu 1 kôl).
Teraz to zapíšeme matematicky. Hľadáme číslo, ktoré
1. je deliteľné 4 (aspoň 12 kolov): 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, **48**, 52, ...
2. po delení 7 má zvyšok 6 (aspoň 13 kolov): 13, 20, 27, 34, 41, **48**, 55, ...
3. po delení 10 má zvyšok 8: 8, 18, 28, 38, **48**, 58, 68, ...

Vidíme, že najmenšie číslo, vyhovujúce všetkým trom podmienkam, je 48. Preto farmár musí mať v kôlni aspoň 48 kolov.
Bodovanie:. Mnohí z vás spravili chybu už v pochopení zadania. Tu sú rôzne faktory, ktoré ste v zadaní prehliadli a počet bodov, ktoré som za to odpočítala (keď si spočítate počet bodov, ktoré ste stratili na chybách, dostanete maximálny počet bodov, ktorý ste mohli získať, ďalej som ešte strhávala za nedostatočný popis a odôvodnenie riešenia).
1. pozemky majú byť rôzne veľké ... –4b
2. počet rohov je 4-6-8 ... –3.5b (ak ste uvažovali s počtom rohov 4 ... –2b, pretože v zadaní to nebolo úplne jasne napísané)
3. máte nájsť najmenší možný počet kolov, vyhovujúci podmienkam ... –3.5b
4. obrázok pri zadaní s 20 kolmi bol len ilustračný, to znamená – bol tam aby ste pochopili ako vyzerá taká ohrada ... –4.5b

Ďalej tu máme chyby, ktoré ste spravili pri riešení príkladu:
1. počet stien je 4-7-10 ... –3b
2. niektorí z vás si zaviedli dĺžky strán v cm alebo mm a zabudli, že nehľadáme vzdialenosť medzi kolmi, ale počet kolov, teda ak má mať strana 3cm (a kôl po každom cm), potom sú na nej spolu 4 koly! ... –4.5b
3. my sme sa pýtali koľko kolov potrebuje farmár na oplotenie 1 veľkého štvorcového pozemku, alebo 2 menších štvorcových pozemkov, alebo 3 najmenších štvorcových pozemkov. Niektorí ale napísali koľko potrebuje na oplotenie všetkých typov pozemkov spolu. ... –1b