PIKOMAT

Vzorové riešenia 2. série, kategória 5-6

Príklad M1: Väzenie. *Opravoval Pavol „Lietadlo“ Koprda.*

Hľadáme kód, o ktorom vieme, že je to najmenšie päťciferné číslo, ktoré spĺňa nasledujúce podmienky: je deliteľné troma, je deliteľné piatimi, všetky jeho cifry sú nepárne, jeho ciferný súčet je deliteľný trinástimi.

Ako prvé zistíme, aký môže byť maximálny ciferný súčet päťciferného čísla. Keby sa skladalo len z deviatok (9 je najvyššia cifra), ciferný súčet by bol 9×5 = 45. Takže *maximálny ciferný súčet kódu je 45*.

Teraz sa pozrieme na deliteľnosť piatimi. Pre každé číslo deliteľné piatimi platí, že na mieste jednotiek sa nachádza buď 0, alebo 5. Nula však v našom prípade neprichádza do úvahy, keďže máme dovolené iba nepárne cifry. Takže *posledná cifra kódu je 5*.

Ďalej deliteľnosť troma. Pre každé číslo deliteľné 3 platí, že jeho ciferný súčet je deliteľný 3. My ale vieme, že ciferný súčet musí byť deliteľný ešte aj 13 a že nie je väčší ako 45. Aký teda môže byť ten ciferný súčet? Kvôli deliteľnosti 13 pripadajú do úvahy iba 13, 26 a 39. A z tých je deliteľné 3 iba jediné: 39. Teda *ciferný súčet kódu je 39*.

Pamätáme si, že posledná cifra je 5. Keďže ciferný súčet celého kódu je 39, ciferný súčet prvých 4 cifier musí byť 34. To je pomerne veľké číslo na iba 4 cifry, a preto sú len dve možnosti, ako ho dosiahnuť. Môže to byť buď súčet 9+9+8+8, alebo 9+9+9+7. Keďže chceme čo najmenší kód, chceme na prvom mieste čo najmenšiu cifru (prvá cifra „najsilnejšie“ rozhoduje o veľkosti celého čísla). Najmenšia cifra v našom výbere je 7, a tak ju dáme na prvé miesto. Na prostredné tri miesta nám už ostali iba deviatky. Hurá, našli sme kód: ***79995***.

Bodovanie:

výsledok – 2b.
posledná cifra 5 aj s odôvodnením – 0,5b.
ciferný súčet 39 aj s odôvodnením – 1,5b.
odôvodnenie, prečo neexistuje menší kód – 1b.

Príklad M2: Strážcove mince. *Opravovala Lenka „Lenika“ Bendová.*

Po prečítaní zadania je jasné, že inak ako porovnávaním hmotností sa tento príklad riešiť nedá. Zároveň však spôsobov, ako falošnú mincu odhaliť, je hneď niekoľko. Tu uvediem zopár medzi vami riešiteľmi najpopulárnejších a logicky najčistejších.

Riešenie 1

Mince si rozdelíme na 4 kôpky po 3 mince.
Pri **prvom vážení** dáme na každú misku váh jednu trojicu. Tu môžu nastať 2 prípady.
1) kôpky sú rovnako ťažké – falošná minca je v druhých dvoch kôpkach, ktoré sme nevážili.
2) kôpky nie sú rovnako ťažké – falošná minca sa nachádza na váhach.
V oboch prípadoch vieme o 6 minciach povedať, že sú určite pravé (označíme si ich P) a o druhých 6, že je medzi nimi falošná (označíme si ich F).

Pri **druhom vážení** dáme na váhy jednu trojicu z F a jednu trojicu z P.
1) kôpky sú rovnako ťažké – falošná minca je v druhej trojici z F.
2) kôpky nie sú rovnako ťažké – falošná minca sa nachádza v tej trojici z F, ktorá je na váhach.
V oboch prípadoch sme našli trojicu mincí, v ktorej sa určite nachádza falošná minca.

Pri **treťom vážení** dáme na váhy ľubovoľnú z nich a na druhú misku dáme pravú mincu.
1) mince sú rovnako ťažké – falošná minca je medzi zvyšnými dvoma „podozrivými mincami“.
2) mince nie sú rovnako ťažké – falošná minca je tá, ktorú práve vážime.

Ak pri treťom vážení nastal prípad 1), musíme **vážiť štvrtýkrát**. Opäť porovnáme pravú mincu s jednou zo zvyšných dvoch „podozrivých“ mincí.
1) mince sú rovnako ťažké – falošná minca je tá, ktorú sme ešte nevážili.
2) mince nie sú rovnako ťažké – falošná minca je tá, ktorú práve vážime.

Riešenie 2

Mince si rozdelíme na 3 kôpky po 4 mince (nazveme ich A, B, C).
Pri **prvom vážení** dáme na váhy kôpky A a B.
1) kôpky sú rovnako ťažké – falošná minca je v tretej kôpke (C).
2) kôpky nie sú rovnako ťažké – falošná minca sa nachádza na váhach.

Ak nastal prípad 2), nevieme presne, v ktorej kôpke je falošná minca (A alebo B). Zistíme to **druhým vážením**: porovnáme jednu podozrivú štvoricu s pravou štvoricou (A s C alebo B s C). Tu uvediem príklad porovnávania A s C.
1) <u>kôpky A a C sú rovnako ťažké</u> – falošná minca je v B.
2) <u>kôpky A a C nie sú rovnako ťažké</u> – falošná minca je v A.
Ostali nám 4 „podozrivé“ mince.

Pri **treťom vážení** dáme na váhy po jednej z týchto mincí.
1) <u>mince sú rovnako ťažké</u> – falošná minca je medzi zvyšnými dvomi mincami.
2) <u>mince nie sú rovnako ťažké</u> – falošná minca je na váhach.
Teraz už máme len 2 „podozrivé“ mince.

Pri **štvrtom vážení** dáme na jednu misku pravú mincu a na druhú misku jednu z „podozrivých“ mincí. Ktorá z „podozrivých“ dvoch je falošná, zistíme takto.
1) <u>mince sú rovnako ťažké</u> – falošná minca je tá, ktorú sme nevážili.
2) <u>mince nie sú rovnako ťažké</u> – falošná minca je tá, ktorú práve vážime.

Pri oboch týchto postupoch nezáleží na tom, či je falošná minca ľahšia alebo ťažšia. Mnohí z vás použili postup, v ktorom najskôr zistili váhu mince a potom ju už ľahko odhalili.

<u>Riešenie 3</u>
Pri **prvom vážení** dáme na misky váh všetky mince – 6 na jednu stranu a 6 na druhú. Samozrejme jedna z kôpok bude ťažšia ako tá druhá.
Pri **druhom vážení** použijeme ťažšiu z kôpok. Rozdelíme ju na 2 trojice a tie odvážime.
1) <u>kôpky sú rovnako ťažké</u> – falošná minca bola v ľahšej šestici z prvého váženia, a teda je ľahšia ako pravé mince.
2) <u>kôpky nie sú rovnako ťažké</u> – falošná minca sa nachádza na váhach a je ťažšia ako pravé mince.

Takže po druhom vážení máme buď šesticu „podozrivých“ mincí a vieme, že falošná minca je ľahšia ako pravé (prípad 1), alebo trojicu „podozrivých“ mincí a vieme, že falošná minca je ťažšia ako pravé (prípad 2).

Prípad 1
Pri **treťom vážení** rozdelíme „podozrivú“ šesticu na 2 trojice a porovnáme. Keďže vieme, že falošná minca je ľahšia ako pravé mince, určite bude v ľahšej trojici.

Pri **štvrtom vážení** dáme na váhy ľubovoľné 2 mince z ľahšej trojice.
1) <u>mince sú rovnako ťažké</u> – falošná minca je tá tretia z trojice.
2) <u>mince nie sú rovnako ťažké</u> – falošná minca je na váhach a keďže o nej vieme, že je ľahšia ako pravé mince, je to tá ľahšia z váženej dvojice.

Prípad 2
Pri **treťom vážení** dáme na váhy ľubovoľné 2 „podozrivé" mince.
1) <u>mince sú rovnako ťažké</u> – falošná minca je tá tretia z trojice.
2) <u>mince nie sú rovnako ťažké</u> – falošná minca je na váhach a keďže o nej vieme, že je ťažšia ako pravé mince, je to tá ťažšia z váženej dvojice.

Samozrejme, tento príklad sa dal riešiť aj inak. Pri všetkých postupoch však bolo dôležité rozobrať všetky prípady, ktoré môžu nastať na váhach. Iba tak si môžeme byť istí, že falošnú mincu na dané 4 váženia <u>*určite*</u> odhalíme.

<u>Bodovanie</u>:
správne riešenie s kompletným vysvetlením – 5b.
riešenie z veľkej časti správne, ale nedokončené, s chybami prípadne nedostatočným vysvetlením – 2,5 až 4b.
snaha o riešenie, riešenie bez vysvetlenia – 0,5 až 2b.

Príklad M3: Klaudia. *Opravoval Pavol „Tamara" Hronský.*

Princ Eduard položil každej z princezien jednu otázku a ony na tú otázku postupne odpovedali tak, ako je napísané v zadaní. My sa snažíme zistiť, ako princ prišiel na to, ktorá princezná je Klaudia. Poďme na to postupne.

1. Čo ak by bola Klaudia vľavo? V tomto prípade by (pravdivo) tvrdila, že ona sama sedí v strede, čo nedáva zmysel. Preto vľavo byť nemôže.
2. Čo ak by bola Klaudia v strede? V tomto prípade by Klaudiina odpoveď na otázku musela byť „Klaudia" a nie „Karolína". Takže ani v strede nemôže byť.

Preto jediná možnosť, kde Klaudia môže byť, je vpravo. Pre skúšku správnosti skúsme zistiť polohu ostatných sestier, aby sme si overili, že úloha vôbec má riešenie. Podľa tvrdenia Klaudie je v strede Kornélia, ktorá vo svojej odpovedi o sebe klamala, čo mohla. Ostáva nám už len Karolína, ktorá bola vľavo a taktiež klamala – všetko je teda v poriadku.

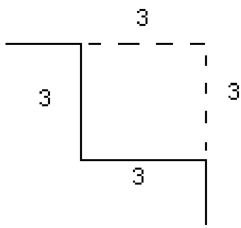
Bodovanie:

postup a zdôvodnenie – 3,5b.
kontrola riešiteľnosti – 1b.
odpoveď – 0,5b.

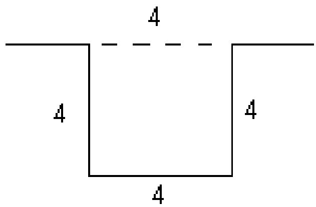
Príklad M4: Koláč. *Opravovala Veronika „Nika“ Jankovičová.*

Vieme, že koláč mal na začiatku tvar štvorca so stranou dlhou 41cm. Teda jeho ***pôvodný obvod*** bol 4×41 = **164cm**.

Prišiel prvý škriatok a odhryzol z rohov štvorca malé štvorčeky so stranou dlhou 3cm. Takže v každom rohu „zmizlo“ 6cm z obvodu. Zároveň sa tam však objavilo nových 6cm, ktoré vznikli na mieste, kde bol vyhryzený štvorček (na obrázkoch je prerušovanou čiarou vždy vyznačený obvod, ktorý zmizol). To znamená, že obvod sa zmenil takto: 164 – 4×6 + 4×6 = **164cm**. Čiže vlastne ***po prvom škriatkovi zostal obvod rovnaký***.



Keď prišiel druhý škriatok, odhryzol zo stredu každej strany štvorček so stranou dlhou 4cm. Na miestach, kde si odhryzol, vznikli „priehlbiny“, ktoré síce ubrali z každej strany 4cm, no v každej priehlbine zároveň vznikli 3 strany dlhé 4cm.
Teda nový obvod bude:
164 – 4×4 + 4×3×4 = **196cm *po druhom škriatkovi***.



Bodovanie:

pôvodný obvod koláča – 0,5b.
po 1. škriatkovi – 2b.
po 2. škriatkovi – 2b.
odpoveď na konci – 0,5b.

Príklad M5: Lode. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Keďže lode premávaju podľa zadania už od nepamäti, môžeme očakávať, že už pred našou plavbou sú nejaké lode na svojej obvyklej trase. Všetky lode smerujúce do princovej zeme určite stretneme, nech už sú kdekoľvek, pretože nám idú naproti. Navyše stretneme aj všetky lode, ktoré ešte len vyplávajú z Ferdinandovho kráľovstva, kým my sa už plavíme po mori. Iné lode, tie, čo idú alebo pôjdu naším smerom, vôbec nebudeme uvažovať – otázka v zadaní sa na ne nepýta a aj tak ich nikdy nestretneme.

Zistime najprv, koľko lodí už je na svojej trase tesne pred naším odchodom. Sú to lode, ktoré vyplávali z Ferdinandovho kráľovstva včera, predvčerom, pred 3 dňami a tak ďalej, až po loď, ktorá vyplávala pred 7 dňami. Viac ich niet, pretože loď, ktorá opustila prístav pred 8 dňami, už šťastne dorazila a nepočítame ju. Spolu 7 lodí je už na ceste oproti nám.

V momente, keď vyplávame, vypláva nám naproti loď č. 8. A kým sa budeme plaviť najbližších 7 dní, vypláva ešte 7 lodí oproti nám – každý deň jedna. To je spolu 15 lodí. Zvyšný poldeň našej cesty už 16. loď vyplávať nestihne (16. loď vypláva až pol dňa po skončení našej plavby). Takto sme stretli spolu 15 lodí, čo je správny výsledok.

Poznámka ku mnohým vašim postupom: je nesprávne uvažovať, že každý deň našej plavby stretneme oproti jednu loď. To by znamenalo, že protiidúce lode stoja na mieste a tiež že ďalšie už z prístavu nevyrážajú. Pri takomto postupe ste ich stretli 7 alebo 8. V skutočnosti protiidúce lode stretávame každého pol dňa, z toho prvú z nich už po 6 hodinách. Síce platí, že nová loď vypláva len raz za deň, ale my im plávame *naproti*. Toto si bolo treba uvedomiť.

Bodovanie:

správny výsledok s jasným vysvetlením – 5b.
výsledok 7 či 8 lodí s odôvodnením, že čo deň, to 1 loď – 2 až 3b.
mierne nedostatky v postupe – mínus 0,2 až 1,5b.

Pikomat bol podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy č. LPP-0375-09.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára