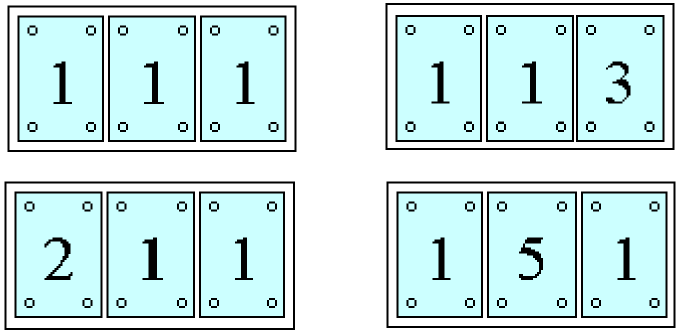
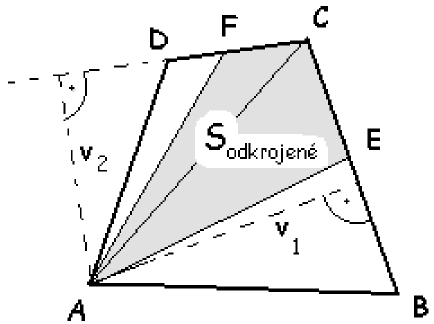


Príklad M5: Tortu na uzmierenie *opravovala Michaela Myška Němcová*
Ľubovoľná torta mohla vyzerať napríklad tak, ako na obrázku pod textom.
Celú tortu si rozdelíme na 2 trojuholníky ADC a ABC. Bod E umiestnime do stredu strany BC, potom $|CE|=|EB|=1/2|BC|$. Výšku trojuholníka ABC na stranu BC nazvime v_1, ktorá je súčastne výškou trojuholníkov CEA a EBA na strany CE a BE.
Potom zo vzorca pre obsah trojuholníka platí: $(|CE| \cdot v_1) : 2=(|EB| \cdot v_1) : 2$,keďže $S_{AEC} + S_{ABE}= S_{ABC}$
Z toho teda vyplýva že $S_{AEC} = S_{AEC} = ½(S_{ABC})$
Toto isté použijeme na trojuholník ADC, $S_{AFC} = S_{ADF} = ½(S_{ADC})$
Keďže $S_{ABC} + S_{ADC}= S_{ABCD}$ a $S_{AEC} + S_{AFC}= S_{ODKROJENÉ}$, čo znamená že $S_{ODKROJENÉ} = ½(S_{ABCD})$.
Kubo teda odkrojil presne ½ torty.
Bodovanie: 2,5 bodu- riešenie, 2,5 bodu -zdôvodnenie

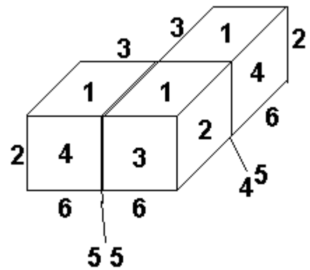


Vzorové riešenia 3. série letnej časti kategórie 5-6

organizátor korešpondenčného seminára

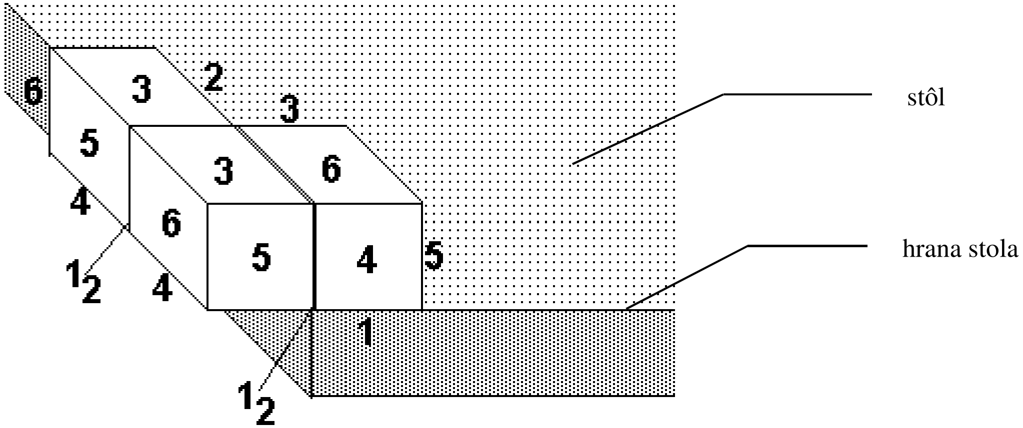
podporuje odborný rast organizátorov seminára

Príklad M1: Žiadny hazard *opravoval Matej Bendži Bendžala*
Úlohou bolo zlepiť 3 kocky navzájom a aspoň jednu k stolu tak, aby bol súčet čísel na viditeľných stenách maximálny / minimálny.
Najprv určíme, koľko stien môže byť zalepených (k stolu alebo inej stene). Ak zlepíme navzájom 3 kocky, vždy treba použiť 4 steny, nejde to ani s viac, ani s menej. Stola sa musí dotýkať aspoň jedna (podľa zadania), môžu sa však i dve z dvoch rôznych kociek alebo aj tri, z každej kocky jedna. Spolu teda môže byť zakrytých 5 až 7 stien.
Začnem minimálnym súčtom. Treba zakryť najviac stien a najväčšie čísla. Najväčšie čísla máme: 6, 6, 6, 5, 5, 5, 4,... . Skúsim teda, či ide zakryť 7 najväčších čísel (7 je najväčší možný počet, ako sme už povedali). Nech sa všetky tri kocky dotýkajú stola číslom 6. Prvá a druhá sa bude dotýkať číslami 5-5. Ostávajú voľné na druhej kocke číslo 1 na vrchu a po bokoch čísla 2, 3, 4. Najväčšie je číslo 4 a k tomu teda pripojíme tretiu kocku najväčším číslom – 5. Zakryli sme teda 7 najväčších čísel: 6,6,6 je na stole, 5,5 a 5,4 sa dotýkajú, celkový súčet je potom 26. Samozrejme kocky možno rôzne otáčať a tvoriť tak nové riešenia, ale vždy budú zalepené týchto 7 najvyšších čísel a tvar musí byť zachovaný.

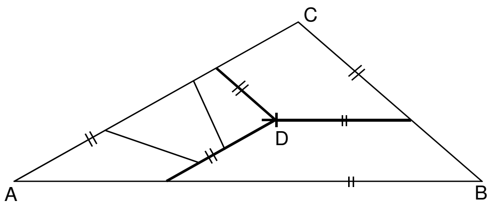


- spodné steny sú prilepené na stôl, steny ktoré nevidíme, majú číslo pri jednej zo svojich viditeľných hrán.

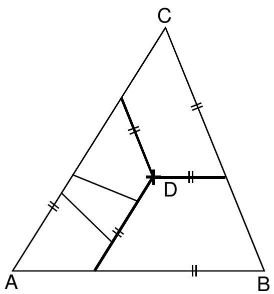
Pokiaľ hľadáme maximálny súčet viditeľných hrán, mali by sme zalepiť najmenej stien – 5 a mali by na nich byť najmenšie čísla – teda 1, 1, 1, 2, 2, ... Mnohý, riešili úlohu tak, že povedali, že nie je možné, aby sa zalepili najmenšie čísla, že je potrebné, aby boli zalepené dve protiľahlé steny a ich súčet je vždy sedem, zalepí sa teda vždy jedna z dvojíc 1-6, 2-5 alebo 3-4. Dve protiľahlé steny je naozaj nutné zalepiť, ak chceme aby bola na stole len jedna kocka a nie je to na kraji stola (pretože jednou stenou sa musí dotýkať stola a na druhú je nalepená druhá kocka), ak je ale na kraji stola toto neplatí – vtedy je možné použiť len najmenšie čísla. Súčet je potom 56 = 63-1-1-1-2-2, čo je zaručene maximum, lebo sme zalepili len 5 stien (čo musí byť vždy) tými najmenšími existujúcimi číslami. Samozrejme riešení je viacero, rozličnými polohami kociek, ale vždy sa zakryjú tie isté čísla. Pri riešení, bez možnosti, že by kocky mohli byť pri hrane stola, bol maximálny súčet 52, toto nebolo považované za správne riešenie, keďže 52 je menej ako 56, ale boli za toto riešenie udeľované body (menej ako plný počet).
Bodovanie: V a.) za súčet čísel 56 (správne riešenie): 2,5 bodu**,** súčet čísel 52: 1,5 bodu (výsledok bez postupu 0,5 bodu)**,** postup, ktorý mohol viesť k výsledku: 1 – 1,5 bodu**,** V b.) za súčet čísel 26 (správne riešenie): 2,5 bodu (výsledok bez postupu 1,5 bodu)**,** súčet čísel 28: 0,5 bodu**,** postup, ktorý mohol viesť k výsledku: 0,5 – 1,5 bodu.



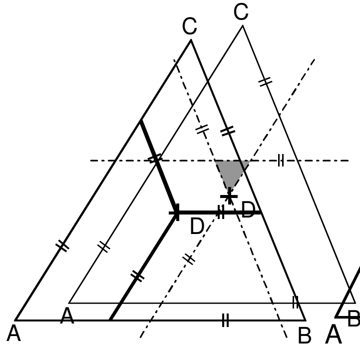
Príklad M2: Plášť pre škriatka *opravoval Peter Mitec Miťko*
V tomto príklade bolo najdôležitejšie prísť na to, ako vytvoriť v trojuholníku 3 lichobežníky. Ak ste toto zvládli, tak vytvoriť ich viac už nebol problém. **Ale mnohí z vás na to zabudli !** Posnažím sa napísať čo najvýstižnejšie riešenie, pretože mnohí ste to odflákli. Ako prvý si zoberiem ostrouhlý trojuholník. Do jeho vnútra vpíšem bod. (Nezáleží kam, ale nesmie patriť ani jednej strane. Prečo? Pretože ..., ale to už nechám na vás. Podľa mňa na to hravo prídete.) Ak by som do trojuholníka vpisoval lichobežníky akokoľvek, ak nebudú tvoriť strany trojuholníka jednu z ich základní, vždy mi tam ostane trojuholník alebo iný útvar. Keďže druhá základňa musí byť rovnobežná s prvou, treba vytvoriť rovnobežky s každou stranou, ktoré prechádzajú mojím zvoleným bodom. Ak by neprechádzali, vznikol by mi zase trojuholník. A to nechcem. Dalo sa ísť aj z druhej strany. Najprv by som si spravil dve rovnobežky so stranami trojuholníka a potom tretiu, ale tak, aby prechádzala priesečníkom predchádzajúcich dvoch (inak by vznikol trojuholník) – obrázok 1. Teraz už stačilo pospájať úsečky v trojuholníku tak, aby tvorili lichobežníky – obrázok 2.
Ak chcem vytvoriť viacej lichobežníkov, stačí ak budem deliť hociktorý lichobežník rovnobežkami zo zakladňami. Taktiež môžem postupovať ako na obrázku 3, ale potom si musím dať pozor, aby ani jedna z vytvorených úsečiek nebola rovnobežná s bočnými stranami lichobežníka. Dá sa ich pravda takýmito spôsobmi vytvoriť nekonečne veľa.
Rovnako sa dá postupovať aj pri tupouhlých a pravouhlých trojuholníkoch (obrázky 3, 4).
Veľmi elegantne sa to dalo riešiť aj cez stredné priečky trojuholníka – obrázok 6.
Bodovanie: 0,1 až 1 bod som stŕhal, ak ste nenapísali ako vytvoriť viac než 3 lichobežníky. Ak ste trojuholník a lichobežníky len načrtli a nenapísali, čo platí pre úsečky, tak za to bolo - 0,1 bodu.



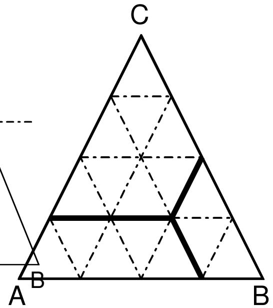
Obrázok 5



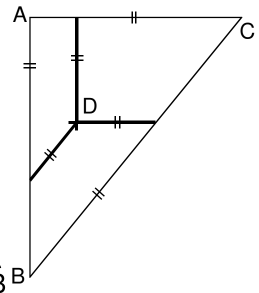
Obrázok 3



Obrázok 1
Obrázok 2



Obrázok 6

Obrázok 4


Príklad M3: Mravčiu jednotku rýchleho nasadenia *opravoval Martin Malic Handlovič*
V tomto príklade je nutné na jeho správne vyriešenie si uvedomiť, že keď máme použiť z každého čísla aspoň jednu cifru, tak ich bude aspoň 6, ale my máme dostať len 4-ciferné číslo, a teda nutne musíme použiť cifry, čo sa opakujú, a to konkrétne dve cifry, čo sa opakujú, lebo žiadna cifra sa tam neopakuje viac ako 2 krát. Keď si pozorne vypíšete opakujúce sa cifry, tak zistíte, že čísla 0882 a 9799 sa tam nevyskytujú, a preto zaberú vo výslednom čísle dve cifry. Teda nám ostávajú dve cifry a nimi musíme zabezpečiť zvyšné 4 čísla. Ale to nejde inak, len tak, že použijeme dve opakujúce sa dvojice zaberajúce 4 čísla, **a to je jedine 0 na mieste stoviek a 1 na mieste desiatok**. Teraz už ľahko príklad dokončíme a z dvoch zvyšných možností vylúčime 0019, lebo je tam 2 krát cifra nula. Teda výsledný počet mravcov, ktorý pomáhal Popoluške je **9012**.
Bodovanie: Za správne riešenie 5 bodov, za výsledok bol 1 bod, ak ste zabudli vyskúšať niektorú z dvojíc opakujúcich sa cifier, tak okolo 3 bodov, ak ste len tak zvolili cifru, alebo ste nedokázali, prečo ste tak postupovali, ste prevažne dostali do 2 bodov.

Príklad M4: Spravodlivosť musí byť *opravovala Kami Vyslocká*
Zistíme si najprv, koľko najviac tabuliek s cifrou 1 by sme mohli potrebovať. Hľadáme také štyri čísla, kde by sme potrebovali najviac cifier 1. To bude vtedy, keď sa z klobúka vytiahne číslo 111 a ešte tri čísla, v ktorých sú dve 1. (napr. 113, 211, 151). Číslo iné ako 111, ktoré by malo v zápise tri 1 (a bolo by podľa zadania od 1 do 700) neexistuje. Preto naozaj najviac jednotiek, ktoré by sme mohli potrebovať pri vyvesení čísel vytiahnutých z klobúka je 3+2+2+2 = 9. Premyslite si teraz, koľko najviac tabuliek s cifou 2 by sme potrebovali. A koľko s cifrou 3, 4, 5?
Cifra 6 a cifra 9 sa podľa zadania dá vyvesiť takou istou závesnou tabuľkou. Najviac ich budeme potrebovať, keď sa z klobúka vyberú čísla 666, 669, 696, 699. To je 12. Určite nebudeme potrebovať viac, lebo máme štyri tabule a na každej je najviac trojciferné číslo, teda spolu najviac 12 cifier.
Zamyslime sa ešte nad cifrou 7. Číslo 777 nevyhovuje zadaniu (od 1 do 700), preto sa na jednej tabuli môžu objaviť najviac dve cifry 7 (napr. 177, 377, 577,677). Spolu teda 2+2+2+2 = 8. Ako je to s ciframi 8 a 0 nechám už na vás.
Bodovanie: Ak z riešenia nebolo jasné, prečo stačí 9 (8) tabuliek z určitej cifry, tak bolo 0,5 boda dolu. Ak ste zabudli, že tabuľka 6 sa dá vyvesiť aj ako 9, tak 1 bod dolu. Za drobné chyby či nejasnosti 0,5 – 1 bod dolu.