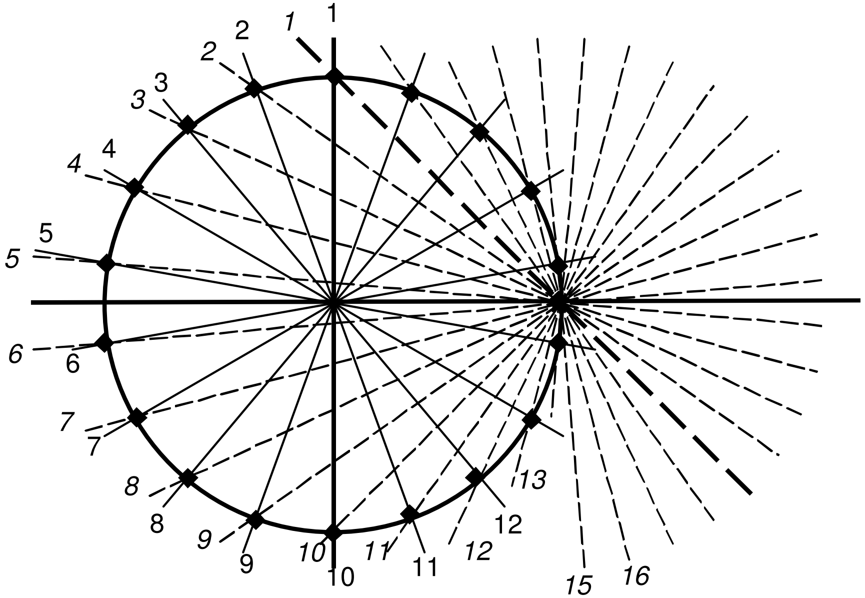
Príklad M6: *opravovala Dáša Horáková*

Vašou úlohou bolo zistiť, ako bude vyzerať „večný“ záhon, teda presne v ktorých miestach dôjde k skríženiu modrého a zeleného lúča. Počiatočná poloha je na obrázku vyznačená hrubšou čiarou. Zelený lúč je na obrázku zakreslený prerušovanou čiarou, modrý neprerušovanou čiarou. Prvá vec, ktorú si treba uvedomiť, je to, že zelený lúč sa pohybuje 2-krát pomalšie. Keď modrý lúč prejde polovicu kruhu, zelený prejde len štvrtinu, keď modrý prejde štvrtinu kruhu, zelený prejde len osminu, keď modrý prejde 10°, tak zelený prejde len 5°. No a teraz si to môžeme vyskúšať, kde by sa nám lúče preťali. Číslami 1 je označená počiatočná poloha lúčov, číslami 2 ďalšia poloha atď. Malými štvorčekmi sú vyznačené body, v ktorých sa zodpovedajúce si lúče křížia. Kto rysoval presne, vyšlo mu, že tieto body vytvoria kružnicu so stredom na modrom kameni a s polomerom rovným vzdialenosti medzi modrým a zeleným kameňom. To však nie je všetko. Keď sa modrý lúč otočí o 90°, tak zelený sa otočí o 45° a v tomto okamihu sa oba lúče úplne prekryjú – kvety teda vyrastú všade tam, kam tieto dva prekrývajúce sa lúče dosvietia. Mnohí z vás ste úlohu vyriešili správne a vzniknutému záhonu ste dali aj pekné mená – napr. slnko v odraze hladiny, Saturn, žiarivé slnko. Pre tých, ktorým sa úloha páčila, mám ešte jednu podobnú. Skúste zistiť, ako by vyzeral záhon, ak by na začiatku boli oba lúče rovnobežné (zmení sa len začiatočná poloha zeleného lúča).



A ešte jeden námet na rozmýšľanie: (niektorí z vás si to všimli) skúste sa pozrieť na trojuholníky, ktoré sú vytvorené modrým a zeleným kameňom a bodom, v ktorom sa krížia lúče – všímajte si najmä na uhly v týchto trojuholníkoch… A zvyšok už nechám na vás. ☺

Hodnotenie: Za riešenie, obsahujúce dostatok zistených bodov, či obsahujúce dostatočné vysvetlenie 5 bodov. Za riešenie bez objavenia priamky 4 body. Za riešenie len s priamkou 2,5 bodu. Za správne riešenie bez vysvetlenia, bez narysovania 2,5 bodu.

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti kategórie 5-6

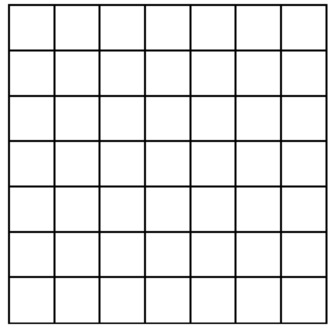
Príklad M1: *opravovala Majka Hanulová*

Najlepší spôsob riešenia tohto príkladu je od konca. Potom, ako sa Osmijanko najedol, ostalo na strome niekoľko pomarančov. Ich počet označíme N. V zadaní sa o počte pomarančov, ktoré ostali na strome, nič nehovorí. N preto môže byť hocijaké celé nezáporné číslo, teda 0,1,2,3,...a tak ďalej. Osmijanko po všetky tri razy odtrhol polovicu pomarančov, čo boli na strome, a polovicu pomaranča k tomu. Pri každom trhaní sa teda počet pomarančov najprv zmenšil na polovicu a potom ešte odbudla polovica pomaranča. Ak chceme dostať počet pomarančov pred odtrhnutím, budeme postupovať opačne – najprv pripočítame polovicu pomaranča a potom počet pomarančov násobíme dvomi. Teda ak po poslednom odtrhnutí ostalo N pomarančov, pred posledným odtrhnutím ich bolo $(N + ½) \cdot 2 = 2N + 1$. Tak isto dostaneme aj počet pomarančov pred druhým odtrhnutím a pred prvým odtrhnutím. Pred druhým odtrhnutím bolo na strome $(2N + 1 + 1/2) \cdot 2 = 4N + 2 + 1 = 4N + 3$ pomarančov a pred prvým odtrhnutím $(4N + 3 + 1/2) \cdot 2 = 8N + 6 + 1 = 8N + 7$ pomarančov. Toto je počet pomarančov, ktoré boli na strome pred tým, ako Osmijanko začal trhať. A pretože na konci ich ostalo N, Osmijanko zjedol $8N + 7 – N = 7 N + 7$ pomarančov. Mohol ich zjesť 7, 14, 21, 28, a tak ďalej, ak sa doň zmestí.

Hodnotenie: 2 body za zdôvodnenie a postup, 3 body za riešenia podľa počtu. Tí, ktorí nesplnili nejakú z podmienok v zadaní mohli získať najviac 4 body.

Príklad M2: *opravovala Anička Hanulová*

Ako mnohí z vás správne uviedli, tento príklad nemal riešenie. Už len za túto odpoveď ste mohli získať dva body. Plný počet však získali len tí, ktorí napísali aj správny dôkaz svojho tvrdenia :



Predstavme si mravcovu verandu - štvorec 7×7 kachličiek:
Mravec stojí niekde na nej, na obdĺžniku 2 × 3 kachličky a pod nohami musí mať 6 farieb (nazvime si ich *a, b, c, d, e,f*).

Usporiadanie farieb pod jeho nohami môže byť ľubovolné.Napr. takto:

	1	2	3	4	5	6	7
A	a	b					
B	c	d					
C	e	f					
D							
E							
F							
G							

Avšak náš mravec sa môže otočiť o 90°! Ľubovoľný obdĺžnik 2 × 3 má byť vydláždený 6-mi farbami. Akú farbu teda dáme na políčko B3? Pozrieme sa na políčka A1, A2, B1, B2 a je nám jasné, že tam musí byť farba *e* alebo *f*. Potom si však všimneme políčka B1, B2, C1, C3 – podľa nich môžme doplniť len farbu *a* alebo farbu *b.* A to si zjavne navzájom odporuje.
Niektorí z vás nedoviedli dôkaz do konca, títo získali max. 4.3 bodu.

Druhá, pomerne veľká skupina riešiteľov príklad pochopila tak, že mravec musí vždy stáť zvislo, tak ako na obrázku. Za takéto riešenie bol maximálny počet bodov 4.5. V tomto prípade je riešení viacero. Za nakreslenie jedného z nich ste mohli získať 3 body. Zvyšné body som udeľovala za postup alebo aspoň popis riešenia, podľa jeho kvality.
Jedno z riešení:
Predstavme si, že mravec sa postaví najprv do rohu terasy, tak ako v minulom prípade. Pod nohami má 6 kachličiek rôznych farieb.

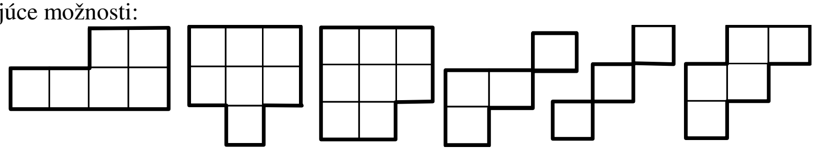
	1	2	3	4	5	6	7
A	a	b					
B	c	d					
C	e	f					
D							
E							
F							
G							

Keď sa teraz mravec posunie o jedno políčko dole, môžeme kachličky D1 a D2 vyfarbiť len farbami *a* a *b*. Potom sa posunie ešte o políčko nižšie. Kachličky E1 a E2 môžeme vyfarbiť iba farbami *c* a *d*. Pri posune ešte o políčko nižšie zistíme, že na kachličkách F1 a F2 môžu byť len farby *e* a *f*. Na zvyšných dvoch políčkach :G1 a G2 zase zjavne môžu byť iba farby *a* a *b*. Teraz skúsime vyplniť políčka A3, B3 a C3.

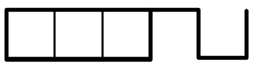
Je jasné, že musia byť vyfarbené farbami *a, b* a *c*. Povedzme, že A3 bude *a,* B3 *b* a C3 *c*. Pri posune ešte o políčko doprava vyfarbíme podobnou úvahou políčka A4, B4 a C4 farbami *b, d* a *f*. Teraz môžme stĺpce 3 a 4 vykachličkovať rovnakým postupom ako prvé dva stĺpce. Rovnako postupujeme s poslednými dvomi stĺpcami. Na konci to bude vyzerať takto:
Ak niekto z vás riešil obidva prípady (mravec sa môže a mravec sa nemôže otáčať) bola som milá a vzala som do úvahy len to riešenie, za ktoré bolo viac bodov.

	1	2	3	4	5	6	7
A	a	b	a	b	a	b	a
B	c	d	c	d	c	d	c
C	e	f	e	f	e	f	e
D	a	b	a	b	a	b	a
E	c	d	c	d	c	c	d
F	e	f	e	f	e	f	e
G	a	b	a	b	a	b	a

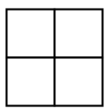
Príklad M3: *opravovala Kaťa Antoničová*
V tomto príklade nám šlo o vytvorenie záhrad zo zápaliek, čiže nejakých mnohouholníkov so želaným obsahom. Väčšina z vás dokázala spraviť záhrady s obsahom 8, 7, 6 a 5 štvorcových zápaliek. Tu ponúkam nákresy, zápalky sú iba na vonkajšom obvode záhrad, čiary vo vnútri sú na uľahčenie rátania obsahov. Podotýkam, že to nie sú jediné možné tvary záhrad s daným obsahom. Trošku ťažšie už bolo vytvoriť záhrady s obsahom 4 a 3 štvorcové zápalky. Nie každý prišiel na nasledujúce možnosti:



Takže častokrát som sa stretla so záhradou, z ktorej trčali ploty na všetky strany, alebo ploty boli vo vnútri záhrady, napr. táto záhrada s obsahom 4 štvorcové zápalky, pričom „zvyšné“ ploty sú vo vnútri záhrady, alebo tu čosi trčí von (opäť rátame len obvod, nie zápalky v záhrade). Tak niečo podobné som uznala ako „polovičné riešenie“.



No a na záver záhrady s obsahom 2 a 1 zápalka štvorcová.
Komentár: Záhrady s obsahom 2 a 1 štvorcová zápalka sa v zadaní vyskytli ako skúška vašej tvorivosti. Ak ste ich nedokázali urobiť, žiadne body ste nestratili. Všetci tí, ktorí sa potrápili a našli ich, si zaslúžia pochvalu. Vzorové riešenie k nim nespravíme. (Tí z Vás, ktorých to zaujíma sa nad tým môžu zamýšľať ďalej.☺)



HodnotenieTakže ostalo nám spolu šesť záhrad, a teda za každú správne vymyslenú záhradu som prideľovala 5 : 6 = 0,8 boda, za všetkých šesť záhrad ste dostali aj malilinký bonus 0,2 boda. Za čiatočne vytvorenú záhradu (čiže ak niečo „trčalo“, alebo ploty boli vo vnútri záhrady, dávala som polovicu z 0,8 boda, čiže 0,4 boda

Príklad M4: *opravovala Kami Vyslocká*
Úlohou je zistiť, koľko **najmenej** peňazí minie Sedmikrásko XIV. na hudobné vzdelanie svojich detí. Keďže hľadáme najnižšiu cenu, musíme ukázať: 1) – že lacnejšie to nejde. 2) – za túto cenu sa to dá. Riešením je 16 vhodných vyučení, teda 16 x 7 = 112 Shz.
1) Prečo to nejde na 15 (a menej) vyučení ? Lebo v tom prípade by sme našli nástroj, na ktorom vie hrať menej ako 4 deti a nevie hrať viac ako 4 deti. (Premyslite si to!) A z tých detí, ktoré na ten nástroj hrať nevedia, by sme vedeli vybrať štyroch. Tí kvarteto určite nevytvoria (chýba im ten nástroj). Lenže Sedmikrásko chcel, aby ľubovoľní štyria z jeho detí vytvorili kvarteto. To sa pri 15 (a menej) vyučení teda NEDÁ.
Lenže úloha nekončí...musíme ukázať, že na 16 **vhodných** vyučení to naozaj ide.
2) napr: Deti si označíme 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7.

klavír	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
husle	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4
čelo	3	3	3	3	4	4	4	5	5	6	4	4	4	5	5	6	5
viola	4	5	6	7	5	6	7	6	7	7	5	6	7	6	7	7	6

1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4
4	4	5	3	3	3	3	3	3	4	4	4	5	4	4	4	5	5
5	6	6	4	4	4	5	5	6	5	5	6	6	5	5	6	6	6
7	7	7	5	6	7	6	7	7	6	7	7	7	6	7	7	7	7

Všetky možné štvorice detí (je ich 35) sú stĺpce. A tvoria kvartetá. (viď tabuľka) Hurá! máme vyhovujúce riešenie.
Alebo inak (len náznak podľa jedného riešiteľa): prvé dieťa – husle, druhé dieťa – husle a klavír, tretie dieťa – husle, klavír a viola, štvrté dieťa – husle, klavír, viola a violončelo, piate dieťa – klavír, viola a violončelo, šieste dieťa – viola a violončelo, siedme dieťa – violončelo.
Zoberme si štvoricu detí a zoradme ich podľa číselného poradia. Prvý nástroj musí mať číslo od 1 do 4 – tí vedia hrať na husle. Druhý od 2 do 5 čo je klavír, tretí 3 až 6 čo je viola a štvrtý musí mať zaručene číslo od 4 po7 a tí všetci vedia hrať na violončelo. Preto vždy vedia vytvoriť kvarteto.
Hodnotenie: Za výsledok (bez ukázania, že je správny) boli dva body, za vysvetlenie prvej časti jeden bod a druhá časť za dva body. Za neúplne zdôvodnenia v oboch častiach sa strhávalo po 0,5 boda.

Príklad M5: *opravovala Janka Nutelka Michaliková*
Lienka mohla namaľovať ľubovoľnú stenu kocky prvou farbou a vždy si vie kocku natočiť tak, aby bola táto už pomaľovaná stena prednou stenou kocky. Na zadnú stenu (oproti prednej) máme potom päť možností, akou farbou ju namaľujeme (zostalo nám totiž ešte 5 rôznych farieb). Ktorúkoľvek stenu potom namaľujeme treťou farbou, môžeme si kocku natočiť tak, aby sa poloha prvých dvoch farieb nezmenila a aby bola tretia farba na vrchnej stene. Na spodnú stenu (oproti vrchnej) si potom môžeme vybrať z troch zvyšných farieb. To znamená, že už máme 5 . 3 = 15 možností. Zostali nám dve farby a pravá a ľavá stena. Pre každú z doterajších možností teda máme ešte dve možnosti, ako uložiť farby, teda spolu máme 15 . 2 = 30 rôznych možností, ako mohla Lienka kocky pomaľovať. Ak vám vyšlo viac možností, určite sú niektoré rovnaké, len inak otočené.
Hodnotenie: Za výsledok boli 2 a za postup max. 3 body.