Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

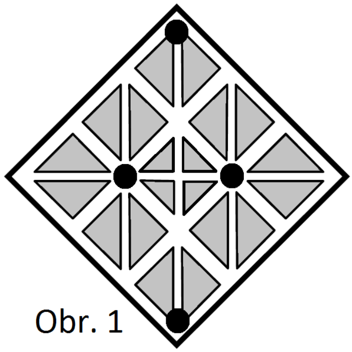
PIKOMAT

29. ročník www.pikomat.sk školský rok 2011/2012

Vzorové riešenia 2. série, kategória 5-6

Príklad M1: Osvetlenie. *Opravovala Vlasta „Krupla“ Gubášová.*

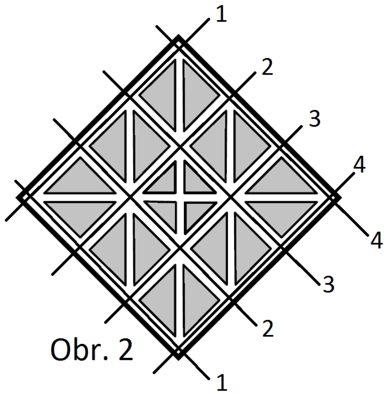
Najskôr jedna jazyková poznámka: „vidieť aspoň jednu fakľu z každého miesta“ znamená to isté, ako „každé miesto je osvetlené aspoň jednou fakľou“.



Obr. 1

Teraz k riešeniu. Na osvetlenie celého systému 12 chodieb sú potrebné minimálne 4 fakle, umiestnené napríklad tak, ako ukazuje Obr. 1. Prečo menej fakieľ nepostačuje, vieme ukázať dvoma spôsobmi.

1. SPÔSOB: (trochu elegantnejší) na Obr. 2 vidíme, že v labyrinte sa vyskytujú štvorice rovnobežných chodieb, ktoré nemajú žiaden priesečník – „križovatku“. Keďže nemajú žiadnu spoločnú križovatku, nemôžu mať ani žiadnu spoločnú lampu. Preto na osvetlenie takýchto 4 chodieb potrebujeme 4 fakle.



Obr. 2

2. SPÔSOB: (tento spôsob nám zároveň pomôže pri umiestňovaní fakieľ) je zrejmé, že najefektívnejšie je umiestňovať fakle na križovatky chodieb. Spočítajme si pre každú križovatku, koľko chodieb sa v nej stretáva. Sú iba dve križovatky so 4 chodbami, zvyšné majú 3 alebo 2 chodby. Ak by sme mali iba 3 fakle, tak aj keby sme ich umiestnili na tie najhustejšie križovatky, mohli by sme osvetliť najviac 4+4+3 = 11 chodieb (vlastne iba 10, pretože naše dve štvorité križovatky majú jednu chodbu spoločnú). Každopádne by to na náš systém, ktorý má chodieb až 12, nestačilo.

Ako fakle rozmiestnime? Už vieme, že je výhodné obsadiť obe štvorité križovatky. Tie nám osvetlia 7 z 12 chodieb. Zvyšné 4 obvodové chodby a 1 uhlopriečkovú chodbu osvetlíme z rohov labyrintu (Obr. 1).

Bodovanie:

správne riešenie s uvedením dôvodu, prečo menej ako 4 fakle nestačia – 5b.; 4 správne rozmiestnené fakle s neúplným zdôvodnením – 4b.; 5 fakieľ s postupom alebo 4 fakle dobre rozmiestnené, s obrázkom bez zdôvodnenia – 3b.; 5 fakieľ, neúplné úvahy – 2b.; odpoveď „3 fakle" alebo 4 fakle nesprávne rozmiestnené – 1b.; uvedený iba výsledok „4 fakle" bez obrázka alebo zdôvodnenia, prípadne riešenie s viac ako 5 fakľami bez postupu – 0b.

Príklad M2: Kopa kamienkov. *Opravoval Pavol „Tamarka" Hronský.*

Hneď na úvod treba poznamenať jednu vec: v tejto úlohe nevieme ovplyvniť, ako bude hrať strážnik. Preto musíme hľadať stratégiu, ktorá nie je závislá na tom, či strážnik potiahne ako sa nám to hodí, alebo nie. Strážnik sa bude vždy snažiť hrať najlepšie ako vie a každú našu malú chybičku obrátiť vo svoj prospech.

Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že je úplne jedno, kto ako začne a že je zaujímavé iba to, kto bude ako končiť. Toto je čiastočná pravda, pretože existuje stratégia, ktorá umožní jednému hráčovi vyhrať, nech sa ten druhý akokoľvek snaží. Ale pekne po poriadku.

Keďže v úvode nevidíme nič, čo by mohlo spôsobiť neskoršiu výhru, poďme sa na celú vec pozrieť od konca. V zadaní je povedané, že kto vezme posledný kamienok (alebo niekoľko kamienkov, pričom už ale žiaden neostane), vyhráva. Čiže ak donútime súpera nechať nám na stole 1 až 9 kamienkov, tak vyhráme. Otázka teraz znie: kedy nemá súper inú možnosť, ako nechať nám 1-9 kamienkov? Nuž to je vtedy, keď je na stole presne 10 kamienkov. Či už vezme maximálny (9), alebo minimálny (1) počet, stále nám tam ostane najmenej 1 a najviac 9 kamienkov. Tým pádom je jasné, že ak necháme súperovi na stole 10 kamienkov, tak vyhráme. Od tohto momentu môžeme odvíjať našu víťaznú stratégiu.

Ako teda docielime, aby sme mu ich tam s istotou vedeli nechať? No, musíme mať pred svojím ťahom na stole najviac 19 a najmenej 11 kamienkov (aby sme mohli zobrať 1 až 9 kamienkov a teda „dorovnať" na 10). A ako to dosiahneme? No jedine tak, že protihráč bude musieť brať z presne 20-tich kamienkov. Bystré oko si všimne, že to je veľmi podobný prípad, ako ten, ktorý sme už rozoberali pred chvíľou – akurát sme sa nechceli dostať z 20 na 10 kamienkov, ale z 10 na 0.

Je teda jasné, že ak pred strážnikovým ťahom ostane na stole taký počet kamienkov, ktorý je deliteľný 10-timi, tak po jeho ťahu vieme z kopy zobrať toľko, aby v kope ostalo presne o 10 menej, ako bolo predtým. Kamienky budú ubúdať po desiatkach takto: 100 -> 90 -> 80 -> … -> 20 -> 10 -> 0, pričom ten posledný vždy vezmeme my. Preto je pre nás výhodnejšie, aby sme šli ako druhí – strážnika takýmto spôsobom zaručene porazíme. Keby sme sa náhodou pomýlili alebo začínali prví, strážnik by hneď použil presne túto taktiku proti nám a sám by dorovnával na násobky 10.

Bodovanie:

správna odpoveď bez postupu – 2b.; samotný postup, krok po kroku ako sme sa dostali k víťaznej stratégii – 3b.

Príklad M3: Lukostrelci. *Opravovala Lenka „Lenika“ Bendová.*

Radca oslovil 3 lukostrelcov a každému povedal 2 vety. Z toho v každom oslovení povedal najviac jednu nepravdivú vetu. Najprv si pripomenieme, čo presne radca povedal, pričom si vety pre lepšiu čitateľnosť trochu zjednodušíme:

1. oslovenie: „Bernard NEVYHRAL. Bernard JE pozvaný na hostinu.“

2. oslovenie: „Bernard NEVYHRAL. Bernard NIE JE pozvaný na hostinu. “

3. oslovenie: „Richard NEVYHRAL. William VYHRAL.“

Radca dvakrát povedal, že Bernard nevyhral (1. a 2. oslovenie). Takže tieto vety musia byť buď obe pravdivé, alebo obe nepravdivé. Ak by boli nepravdivé, museli by už zvyšné vety v 1. a 2. oslovení byť obe pravdivé. A to sú vety „Bernard JE pozvaný na hostinu“ a „Bernard NIE JE pozvaný na hostinu“. Tieto vety si však odporujú, teda nemôžu byť súčasne pravdivé. Z toho vyplýva, že dvakrát sa vyskytujúca veta „Bernard NEVYHRAL.“ musí byť pravdivá. Takže **Bernard nie je víťaz**.

Ostáva rozhodnúť medzi Williamom a Richardom. Ak by boli obe vety „Richard NEVYHRAL“ a „William VYHRAL“ pravdivé, bol by víťazom William. Pre istotu sa pozrime aj na prípad, keď by jedna z nich bola nepravdivá. Ak bola nepravdivá veta „Richard NEVYHRAL“, znamenalo by to, že Richard vyhral, zároveň však má byť pravda „William VYHRAL“. To by boli víťazi dvaja, čo je nemožné. Ak by bola nepravdivá veta „William VYHRAL“ a zároveň pravdivá veta „Richard NEVYHRAL“, nebol by víťaz ani jeden, čo tiež nejde. **Najlepším lukostrelcom bol William.**

Bodovanie:

správna odpoveď s kompletným postupom – 5b.; správna odpoveď s nepresným alebo neúplným postupom – 4,5-2,5b.; správne riešenie bez postupu – 1,5-2b.; len výsledok – 1b.; nesprávne riešenie – 0b.

Príklad M4: Hostina. *Opravovala Katarína „Katka“ Beláková.*

Pre zjednodušenie si spravíme zopár označení:

	pečené kura	pečienka	ryba
číslo na kartičke	**K**	**P**	**R**
počet kartičiek, ktoré si hostia zobrali	*k*	*p*	*r*

Pozrime sa, čo vieme zo zadania povedať:

1. **R**, **P**, **K** sú tri po sebe idúce čísla väčšie ako 1 (teda 2, 3, 4 alebo 3, 4, 5...).

2. Súčet čísel hostí, ktorí chceli kura (získame ho vynásobením čísla a počtu kartičiek, čiže $k \cdot \mathbf{K}$), je rovnaký ako súčet čísel hostí, ktorí chceli rybu ($r \cdot \mathbf{R}$). Súčet čísel hostí, ktorí si objednali pečienku ($p \cdot \mathbf{P}$) je o jedna menší, teda platí: $k \cdot \mathbf{K} = r \cdot \mathbf{R} = (p \cdot \mathbf{P})+1$.

3. Súčet úplne všetkých čísel je menší ako 200, teda $k \cdot \mathbf{K} + r \cdot \mathbf{R} + p \cdot \mathbf{P} < 200$. Keďže dva zo sčítancov sa zhodujú a tretí je len o jedna menší, tak žiaden z nich nemôže byť väčší ako 201:3 = 67. Teda súčty na kartičkách pre jednotlivé jedlá neprekročia 66.

4. Súčet úplne všetkých čísel $k \cdot \mathbf{K} + r \cdot \mathbf{R} + p \cdot \mathbf{P}$ je párny. Súčet $k \cdot \mathbf{K} + r \cdot \mathbf{R}$ je párny (lebo sa rovnajú), a teda $p \cdot \mathbf{P}$ musí byť tiež párne. Tým pádom musia byť $k \cdot \mathbf{K}$ a $r \cdot \mathbf{R}$ nepárne (lebo sú o jedna väčšie ako párne $p \cdot \mathbf{P}$). Z toho nám vychádza, že k, **K**, r aj **R** sú čísla nepárne, pretože iba súčin dvoch nepárnych čísel nám dá nepárne číslo.

Zhrnutie: **číslo pre pečené kurča aj rybu musí byť nepárne. Čísla jedál (v poradí R-P-K) môžu byť 3-4-5; 5-6-7; 7-8-9… Vždy začínajúc nepárnym.**

Zoberme si prvý prípad, kedy **R**=3, **P**=4 a **K**=5.

Súčet čísel pre kura aj rybu má byť rovnaký ($k \cdot \mathbf{K} = r \cdot \mathbf{R}$), preto musí byť deliteľný číslom kuraťa (**K**) aj číslom ryby (**R**). V tomto prípade to teda má byť spoločný násobok čísel 3 a 5. Navyše musí byť nepárny (zistili sme v bode 4) a menší ako 67 (bod 3). Mohli by to byť 15 a 45. Obe si preveríme.

Pre 15-ku by súčin $p \cdot \mathbf{P}$ musel byť 14 (o jedna menší), čo ale nesedí s tým, že **P**=4, pretože 14 nie je deliteľné 4.

Pre 45 by súčin $p \cdot \mathbf{P}$ musel byť 44, čo by sedelo s **P**=4 a p=11. Potom je r=15 a k=9.

Prípad **R**=5, **P**=6, **K**=7.

Opäť hľadáme spoločné násobky čísel 5 a 7, ktoré sú nepárne a menšie ako 67. To je iba 35. Tým pádom musí byť $p \cdot \mathbf{P}$=34, čo opäť kvôli deliteľnosti 34/6 nesedí s **P**=6.

Prípad **R**=7, **P**=8, **K**=9.

Jediným vhodným násobkom by mohlo byť 63, ale ani tu nesedí $p \cdot \mathbf{P}$=62 s tým, že **P**=8.

Prípad **R**=9, **P**=10, **K**=11.

Tu už neexistuje ani žiaden spoločný násobok 9 a 11 menší ako 67.

Takto je to aj pri všetkých ďalších prípadoch pre väčšie čísla jedál (nepárne spoločné násobky sú už väčšie ako 67). Preto už ďalšie riešenie neexistuje.

Pečené kura malo číslo 5, pečienka 4 a ryba 3. Kuchári museli pripraviť 9 kurčiat, 11 pečienok a 15 rýb.

Bodovanie:

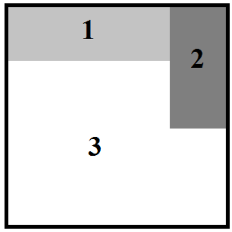
vysvetlenie, prečo sú **K** a **R** nepárne – 1b.; systematické preverenie vhodných možností pre rôzne **K**, **R**, **P** – 1,5b.; zdôvodnenie, prečo viac riešení neexistuje – 0,5b.; výsledok (jasne napísaný) – 2b.

Príklad M5: Koberce. *Opravoval Michal „Kesy“ Kesely.*

V zadaní si pri pozornom prečítaní všimneme nasledujúce dôležité body: spálňa má tvar štvorca; dlhšie strany troch kobercov sú 4, 5 a 6 metrov; koberce pokrývajú spálňu bezo zvyšku, ale sa ani neprekrývajú.

Môže mať spálňa stranu menšiu ako 6 metrov? Nemôže, pretože najdlhší koberec meria 6 metrov a do takej spálne by sa nezmestil.

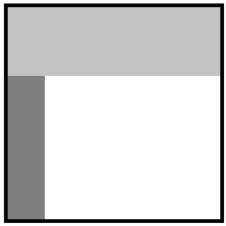
Môže mať spálňa stranu väčšiu ako 6 metrov? Tu už potrebujeme pouvažovať o niečo viac. V takejto izbe niekde leží koberec s dlhšou stranou 6 metrov (na Obr. 1 koberec č. 1). Ale keďže strana izby má viac ako 6 metrov, tento koberec sa netiahne po celej dĺžke steny a nejaká časť pri stene ostáva nepokrytá. Túto časť musí pokryť nejaký iný koberec (koberec č. 2), ktorý má však 4- alebo 5-metrovú dĺžku. Preto tento koberec opäť nejde po celej dĺžke steny. Na obrázku vidíme, že spodnej steny sa zatiaľ žiaden koberec ani nedotkol. Má dĺžku väčšiu ako 6 metrov a nám už zostáva iba jeden koberec s dĺžkou 4 alebo 5 metrov. To je problém.



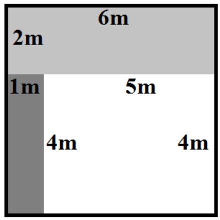
Obr. 1

Zistili sme teda, že spálňa nemôže mať ani viac, ani menej ako 6 metrov. Tým pádom ak úloha má riešenie, tak spálňa musí mať stranu dlhú presne 6 metrov. Poďme sa na to pozrieť.

Šesťmetrový koberec sa nám bude tiahnuť od jednej steny až k náprotivnej stene. Okrem toho musí byť aj svojou dlhšou stranou prirazený tesne k stene, pretože ak by bol niekde v strede izby, ostali by po jeho stranách dva oddelené obdĺžniky, ktoré by sme zvyšnými kobercami isto nezakryli. Zvyšné dva koberce pokrývajú zvyšnú časť izby (Obr. 2).


Obr. 2

Ak štvormetrový koberec položíme k stene tak, aby spolu so <u>šírkou</u> šesťmetrového koberca tvorili celú stenu izby, prídeme na to, že šesťmetrový koberec musí byť 2 metre široký. Z toho už zistíme, ako musí byť otočený 5-metrový koberec a že musí mať šírku 4 metre. 4-metrový koberec potom má šírku 1 meter.



Obr. 3

Týmto spôsobom naozaj ide spálňa kobercami pokryť. Všimnite si, že naozaj platí, že <u>dlhšie</u> strany kobercov sú 6, 5 a 4 metre. Preto úloha riešenie má a bradáčova izba má šírku 6 metrov (alebo obvod 24 metrov alebo obsah 36 metrov štvorcových – všetky odpovede som samozrejme uznával za správne).

<u>Bodovanie</u>:

správna odpoveď – 1,5b.; zistenie, že izba nemôže mať stranu menšiu ako 6 metrov – 1b.; zistenie, že izba nemôže mať stranu väčšiu ako 6 metrov – 1b.; správne rozloženie kobercov – 1,5b.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

AGENTÚRA NA PODPORU VÝSKUMU A VÝVOJA

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09.