Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

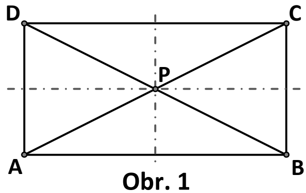
29. ročník www.pikomat.sk školský rok 2011/2012

Vzorové riešenia 4. série, kategória 5-6

Úloha M1: Terč. *Opravovala Ľudmila „Ľudka" Šimková.*

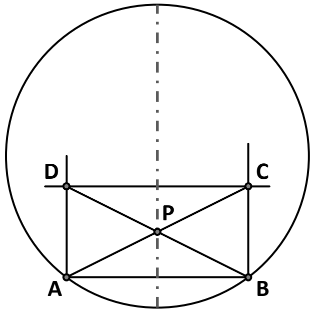
Pri riešení tohto príkladu je veľmi užitočné nakresliť si obrázok. Potom uvidíme veci, na ktoré by sme možno inak neprišli, a tiež sa jednoduchšie popisuje postup. Chceme nájsť stred kruhu, čo je to isté, akoby sme hľadali stred kružnice, ktorá je na jeho obvode. Máme však IBA nástroje, ktorými vieme zostrojiť rovné čiary a pravé uhly.

Keď už máme nakreslenú kružnicu, ako zistíme jej stred? Jeden spôsob by sa nám tu črtal. Zvolíme si ľubovoľné 2 body na kružnici a spojíme ich – takáto úsečka, ktorej krajné body ležia na kružnici, sa nazýva *tetiva* kružnice. Ďalej zostrojíme os tejto úsečky (tetivy). To isté potom spravíme pre ďalšie dva body, ktoré ležia na kružnici, čiže zostrojíme ďalšiu tetivu a jej os. Tam, kde sa pretnú tieto dve osi, je náš hľadaný stred kružnice. Na zostrojenie osi úsečky by sme však potrebovali kružidlo alebo niečo, čím sa dá odmerať dĺžka. My ani jedno z toho nemáme. Tu si môžeme pomôcť obdĺžnikom.



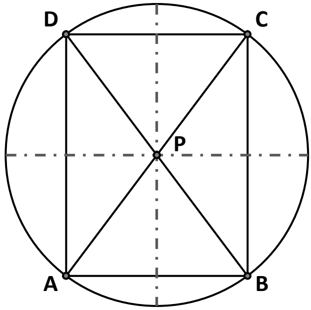
Obr. 1

Na Obr. 1 vidíme, že osi strán obdĺžnika sa pretínajú v jeho strede (bod P), a že týmto bodom prechádzajú aj obidve uhlopriečky. Takže bod P nájdeme ľahko – stačí narysovať uhlopriečky. Potom už len pridáme kolmice na strany obdĺžnika tak, aby prechádzali bodom P, a máme osi strán! (Obr. 1)



Obr. 2

Teraz sa vráťme k nášmu kruhu. „Prirobiť" k tetive AB obdĺžnik by nemal byť problém. V jej koncových bodoch (A, B) spravíme kolmice, a tie potom v ľubovoľnej vzdialenosti od tetivy preložíme ďalšou kolmicou. Takto nám vznikne obdĺžnik ABCD. (Obr. 2) Teraz už len postupom z predošlého odseku (uhlopriečky – bod P – kolmica na AB cez bod P) nájdeme os tetivy AB! (Obr. 2) Toto celé môžeme potom zopakovať pre ďalšiu ľubovoľnú tetivu kružnice a získať tak ďalšiu os tetivy. Tam, kde sa naše dve osi pretnú, je stred kružnice.



Obr. 3

Tento postup sa dá aj trochu urýchliť. Ako? Už pri vytváraní obdĺžnika nad tetivou AB predĺžime kolmice až po druhú stranu kruhu. (Obr. 3) Takto nám hneď vzniknú tetivy AD a BC, a teda hneď aj obdĺžnik ABCD. Keď sa teraz trochu zamyslíme, zistíme, že sa odrazu všetko stretne v bode P. V prvom rade je to priesečník uhlopriečok obdĺžnika. To – ako už vieme – znamená, že sa tam pretínajú aj osi jeho strán. Strany tohto obdĺžnika sú však zároveň tetivami kružnice, a preto priesečník ich osí vyznačuje stred kružnice.

Poznámka:

Mnohí z vás spravili chybu v tom, že hľadali stred úsečky pomocou kružidla, pričom tento nástroj v zadaní nebol povolený. Niektorí zas robili dotyčnice ku kružnici len od oka. Dotyčnica je totiž kolmica na polomer v tom bode, v ktorom polomer pretne kružnicu. Ďalej niektorí tvrdili, že každý trojuholník alebo štvoruholník vpísaný do kružnice je pravidelný. Tu by som odporúčala vždy si skúsiť nakresliť viacero rôznych obrázkov.

Bodovanie:

správne riešenie iba pomocou rovných čiar a kolmíc – 3b.;
postup, ako nájdeme stred kruhu – 1b.;
odôvodnenie, prečo je náš nájdený stred skutočne stredom kruhu – 1b.;
riešenie s ďalšími (nepovolenými) pomôckami – najviac 3b.;
body som strhávala za nepopísané kroky v riešeniach a za nesprávne predpoklady.

Úloha M2: Súčet políčok. *Opravoval Pavol „Tamarka" Hronský.*

V tomto príklade viac ako schopnosť presne spočítať nejaké čísla využijeme schopnosť pozorovania.

Najskôr si ujasnime, ako funguje čudesná skrinka. Keď ňou zatrasieme, na štvorci 8×8 sa vysunie 8 paličiek, pričom každá palička osvetlí všetky políčka od seba naľavo, napravo, hore aj dole. Tieto paličky sa však vždy vysunú tak, že žiadna nesvieti na inú. To znamená, že v každom riadku a v každom stĺpci sa nachádza **práve jedna** palička – to je veľmi dôležité!

Na Obr. 1 a Obr. 2 vidíme príklady, kde sa mohli paličky vysunúť. Nakresliť všetky možnosti nemôžem, lebo ich je 40 320. (Len mimochodom: vieš, ako som prišiel na číslo 40 320?) V oboch prípadoch je súčet čísel pod paličkami 260. Náhoda? Skúsme ešte inú kombináciu – Obr. 3. Zaujímavé, ale opäť 260. To už asi nebude náhoda. Ale prečo je to tak? A bude to 260 vo všetkých prípadoch?

1	2	3	4	5	6	7	8
9	**10**	11	12	13	14	15	16
17	18	**19**	20	21	22	23	24
25	26	27	**28**	29	30	31	32
33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	43	44	45	**46**	47	48
49	50	51	52	53	54	**55**	56
57	58	59	60	61	62	63	**64**

Obr. 1

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	**12**	13	14	15	16
17	18	19	20	21	**22**	23	24
25	**26**	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	**39**	40
41	42	43	44	**45**	46	47	48
49	50	**51**	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	**64**

Obr. 2

1	2	3	4	5	6	**7**	8
9	10	11	12	**13**	14	15	16
17	18	**19**	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	**32**
33	34	35	**36**	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	**54**	55	56
57	**58**	59	60	61	62	63	64

Obr. 3

Poďme si bližšie prezrieť čísla na skrinke. Všimneme si niekoľko jednoduchých vecí, ktoré vyplývajú z ich usporiadania. Kedykoľvek sa posunieme o jedno políčko doprava, číslo sa zväčší o 1, smerom doľava sa zmenší o 1 – to je vlastne samozrejmé, keďže čísla idú po sebe. Podobne však platí, že keď sa posunieme o jedno políčko dole, číslo sa zväčší o 8, smerom hore sa zmenší o 8.

To si vieme prehľadne zhrnúť takto: stĺpcom priradíme čísla od 1 do 8 (stúpajúc vždy +1), riadkom priradíme čísla od 0 po 56

	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	9	10	11	12	13	14	15	16
16	17	18	19	20	21	22	23	24
24	25	26	27	28	29	30	31	32
32	33	34	35	36	37	38	39	40
40	41	42	43	44	45	46	47	48
48	49	50	51	52	53	54	55	56
56	57	58	59	60	61	62	63	64

Obr. 4

	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0+1	0+2	0+3	0+4	0+5	0+6	0+7	0+8
8	8+1	8+2	8+3	8+4	8+5	8+6	8+7	8+8
16	16+1	16+2	16+3	16+4	16+5	16+6	16+7	16+8
24	24+1	24+2	24+3	24+4	24+5	24+6	24+7	24+8
32	32+1	32+2	32+3	32+4	32+5	32+6	32+7	32+8
40	40+1	40+2	40+3	40+4	40+5	40+6	40+7	40+8
48	48+1	48+2	48+3	48+4	48+5	48+6	48+7	48+8
56	56+1	56+2	56+3	56+4	56+5	56+6	56+7	56+8

Obr. 5

(stúpajúc vždy +8) tak, ako na Obr. 4. A čo sme tým dosiahli? Vidíme, že každé políčko predstavuje súčet *čísla svojho stĺpca + čísla svojho riadku* (Obr. 5).

Teraz si spomeňme, čo sme si povedali na začiatku. V každom riadku a v každom stĺpci je práve jedna palička! A čo to znamená pre náš súčet? Nuž znamená to, že každé číslo riadku (1-8) a každé číslo stĺpca (0-56) do celkového súčtu vstúpi práve raz. Takže či chceme alebo nie, musíme sčítať čísla:

1+2+3+4+5+6+7+8 + 0+8+16+24+32+40+48+56 = 260.

Na poradí sčitovania samozrejme nezáleží, to závisí len od konkrétneho rozmiestnenia paličiek.

Bodovanie:

výsledok – 1b.;

postup – 2b.;

odôvodnenie – 2b.

Úloha M3: Pohľad z dvoch strán. *Opravovala Katarína „Katka“ Beláková.*

Skôr, než začneme hovoriť o trojciferných číslach, pozrime sa najprv na jednotlivé číslice.

Keď ich otočíme dolu hlavou, môžeme vidieť, že sa dajú rozdeliť do troch skupín:

1) číslice, ktoré dolu hlavou nedávajú zmysel: 3, 4, 7;
2) číslice, ktoré aj dolu hlavou majú tú istú hodnotu: 0, 1, 2, 5, 8;
3) číslice, ktoré dolu hlavou nadobúdajú inú hodnotu: 6 a 9 (6 sa mení na 9 a 9 sa mení na 6)

Prvú skupinu číslic si nemusíme všímať. Keďže z opačnej strany nedávajú zmysel jednotlivo, nebudú ani v trojciferných číslach.

V prípade druhej skupiny číslic vieme povedať toto: trojciferné čísla zložené z číslic 0, 1, 2, 5, 8 budú rovnaké aj dolu hlavou práve vtedy, keď budú mať na mieste jednotiek a stoviek rovnaké číslice. Pri otočení dolu hlavou si totiž tieto „krajné“ cifry vymenia pozície, a preto ak má byť celé číslo po otočení rovnaké, musia byť tieto krajné pozície rovnaké. Číslica v strede môže byť ľubovoľná (avšak stále len z druhej skupiny), pretože po otočení dolu hlavou ostane na svojom mieste.

Keďže vieme, že číslo nemôže začínať nulou, na „krajné“ pozície môžeme dosadiť len 4 rôzne cifry. Výsledné trojciferné čísla teda budú mať tvar: 1_1, 2_2, 5_5, 8_8. V strede nám nula nevadí, preto tam môžeme dosadiť 5 cifier. Ku každej zo 4 krajných číslic teda pribudne ktorákoľvek z 5 číslic, preto týmto spôsobom vznikne 4·5 = **20 trojciferných čísel**.

Teraz prichádza na rad **tretia skupina číslic**: 6 a 9. Vzhľadom na to, že dolu hlavou sa číslica 6 zmení na číslicu 9 a číslica 9 na číslicu 6, naše trojciferné čísla môžu byť jedine v tvare 6_9 alebo 9_6. Do stredu môžeme opäť dosadiť iba 5 číslic z druhej skupiny (0, 1, 2, 5, 8). To je 5 možných cifier dosadených do tvaru 6_9 a ďalších 5 do tvaru 9_6, spolu je ich teda **10**.

Trojciferných čísel, ktoré vyzerajú na digitálnom displeji rovnako aj z opačnej strany, je spolu 30.

Bodovanie:

preskúmanie jednotlivých číslic – 1b.;
vzťah jednotiek a stoviek – 1b.;
vylúčenie číslice 0 z miesta jednotiek a stoviek – 0,5b.;
vypísanie možností – 2b.;
výsledný počet – 0,5b.

Úloha M4: Rozmery námestia. *Opravovala Simona „Simča“ Galková.*

Ako prvé sa pozrime na **šírku nádvoria**. Tu je to pomerne jednoduché. Vieme, že vyhovuje *Jakubovi X.*, *Zvonimírovi I.* a *Dobroslavovi Veľkému*. Hľadáme teda čísla, ktoré obsahujú 0, sú deliteľné 12 a sú dvojciferné. Dvojciferných čísel deliteľných 12 nie je veľa, sú to: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96. Z týchto čísel jedine 60 obsahuje cifru 0. Zistili sme teda, že **šírka nádvoria je 60**.

Ostáva nám zistiť **dĺžku nádvoria**. Tá vyhovuje *Albertovi Hroznému*, *Jakubovi X.* a *Hubertovi Nerozhodnému*. Hľadáme teda čísla, ktoré sú trojciferné a súčasne menšie ako 200, obsahujú cifru 0 a sú deliteľné číslom 9 <u>alebo</u> číslom 13 (Hubert bol nerozhodný a mal rovnako rád čísla deliteľné 9 <u>aj</u> čísla deliteľné 13 – takže dĺžka nádvoria <u>nemusela</u> byť deliteľná 9 aj 13 <u>zároveň</u>!).

Trojciferné čísla menšie ako 200 sú všetky čísla od 100 až po 199. Z toho 0 obsahujú všetky medzi 100-109, a ďalej 110, 120, 130, atď. až po 190. Už iba skontrolujeme deliteľnosť 9 a 13. Začneme 9, pretože na to existuje pomôcka: aby bolo číslo deliteľné 9, musí byť jeho ciferný súčet deliteľný 9. Keďže sme v rozmedzí 100-199, čísla isto budú začínať jednotkou. Okrem toho musia obsahovať nulu (kvôli *Jakubovi X.*). Aby sme dosiahli ciferný súčet 9, tretia cifra nutne musí byť 8. To nám dáva iba dve čísla: 108 a 180.

Čísla deliteľné 13 overíme ručne alebo na kalkulačke, keďže nemáme pomôcku ako pri 9. Ostanú nám: 104 a 130. Dĺžka nádvoria by teda mohla byť 104, 108, 130 alebo 180. Musíme však ešte overiť ďalšiu vlastnosť nádvoria, a to jeho obvod. Obvod sa páči *Jakubovi X.*, a teda musí obsahovať 0. Pre jedinú možnú šírku (60) a 4 možné dĺžky preto spočítame 4 možné obvody: 2·60 + 2·104 = 328, 2·60 + 2·108 = 336, 2·60 + 2·130 = 380, 2·60 + 2·180 = 480. Nula sa vyskytuje len pri posledných dvoch.

Dostali sme teda dve riešenia, čo je skvelé, keďže teraz je splnená aj posledná podmienka, a to že úloha sa páči *Timotejovi III.*, ktorý má rád úlohy s viac riešeniami. **Rozmery nádvoria sú buď šírka 60 a dĺžka 130, alebo šírka 60 a dĺžka 180.**

Bodovanie:

nájdenie možnej šírky – 1b.;
nájdenie možných dĺžok – 1b.;
overenie obvodu a faktu, že úloha má viac riešení – 1,5b.;
vysvetlenie postupu – 1,5b.

Úloha M5: Kto je kto? *Opravovala Mária „Marry“ Šormanová.*

V prvom rade si treba uvedomiť, kedy je veta *„Ty si Hazterčan a je jasno.“* pravdivá. Keďže je to jedna veta (a nie dve, ako sa niektorí z vás domnievali), tak na to, aby bola pravdivá, musia byť pravdivé obe jej časti. Naproti tomu stačí, aby jedna jej časť bola nepravdivá, a celá veta je klamstvom!

Keďže výrok prvého muža je jednoduchší (obsahuje iba vyjadrenie, že *„druhý je Sandberčan“*), začneme od neho. Jeho pravdivosť závisí od počasia a od národnosti toho, kto ho vyslovil – prvého muža. Tu existujú iba 4 možnosti:

1) AK je jasno a prvý je Sandberčan, potom hovorí pravdu a teda aj druhý je Sandberčan a mal by hovoriť pravdu. Prvá časť jeho výroku („*Ty si Hazterčan*“) však pravdivá nie je, pretože sme predpokladali, že prvý je Sandberčan. Takto to teda byť nemôže.

2) AK je jasno a prvý je Hazterčan, potom musí klamať a teda druhý je tiež Hazterčan. Mal by teda tiež klamať, ale jeho výrok („*Ty si Hazterčana je jasno.*“) je pravdivý. Takže ani toto nesedí.

3) AK je zamračené a prvý je Sandberčan, potom musí klamať, takže druhý je Hazterčan. Je zamračené, mal by hovoriť pravdu, ale obe časti jeho výroku sú nepravdivé.

4) AK je zamračené a prvý je Hazterčan, potom hovorí pravdu. Druhý je teda Sandberčan, mal by klamať. Hoci prvá časť jeho výroku („*Ty si Hazterčan*“) je pravdivá, druhá časť („*je jasno*“) je klamstvo, takže celá veta je klamstvom. Táto možnosť teda ako jediná môže nastať.

Je zamračené, prvý je Hazterčan a druhý je Sandberčan.

Bodovanie:

považovanie druhej vety za dva samostatné výroky – najviac 4b.;
inak som body strhávala za nedostatočné zdôvodnenie, že nájdené riešenie je jediné.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

AGENTÚRA NA PODPORU VÝSKUMU A VÝVOJA

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09.