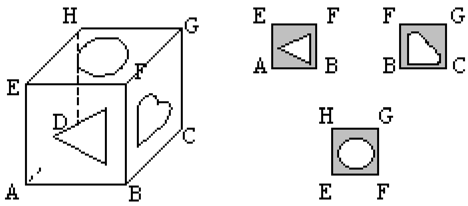
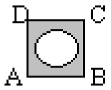
PIKOMAT
Vzorové riešenia 2. série zimnej časti kategórie 5-6

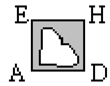
Príklad M1: opravovala Veronika X-ka Zelmanová

Máme kocku ABCDEFGH. Steny ABEF, BCFG a EFGH vyzerajú takto:
1. Zistite ako vyzerajú zvyšné steny:
a) stena ABCD - aby sa cez kocku dala pretiahnuť tyč, musí tu byť O. Pri O nemáme žiadne starosti s otáčaním, pretože akokoľvek ho otočíme, nezmení sa.

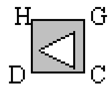




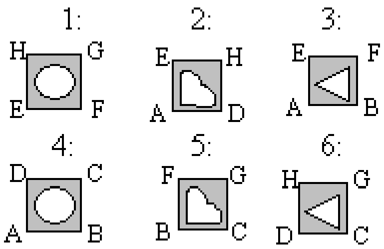
b) stena ADEH - aby sa cez kocku dala pretiahnuť tyč, musí tu byť ♥. A ako ho otočíme? Keď sa pozeráme cez kocku ♥ otvorom, vidíme, že sa nám stena BCGF zhoduje so stenou ADEH, čiže stena ADEH vyzerá takto:

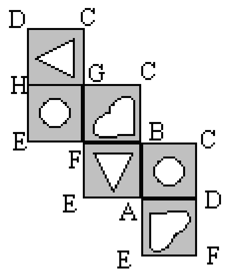


c) posledná stena DCGH - tu musí byť Ń, aby sme mohli pretiahnuť tyč. A ako bude otočený ? Tiež sa musí zhodovať s protiľahlou stenou ABEF, čiže stena ABEF vyzerá takto:



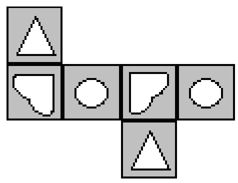
Teraz máme 6 stien a máme dva plášte. V oboch plášťoch máme zadané dve steny: jedna so ♥ a jedna s Ń , ktoré majú spoločnú hranu steny 2 a 3, 5 a 6, 2 a 6, 5 a 3.
1. plášť : Teraz už vieme, že máme zadanú polohu steny 2 a 3. Teraz do voľných políčok dosadzujeme steny podľa spoločných hrán nasledovne: -- Stena 3 má spoločnú hranu BA jedine so stenou 4. (O nemusíme rozhodovať, ako ho natočíme). - Stena 4 má spoločnú hranu AD jedine so stranou 5. Strana 5 je ♥, musíme dávať pozor na natočenie (stranu musíme preklopiť, aby bola úsečka AD navrchu)





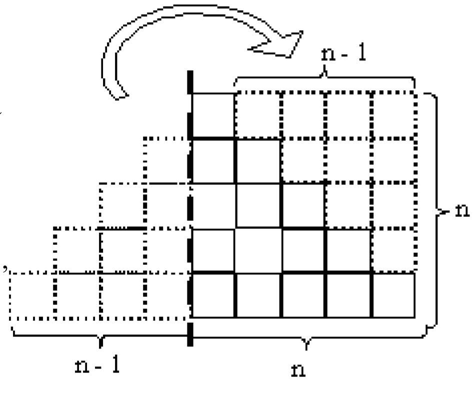
- stena 2 má spoločnú hranu FG len s 1. Čo je O, nemusíme rozmýšľať o natočení. - Stena 1 má hranu HG spoločnú len so 6. Musíme ho preklopiť, aby HG bola dole.
2. Plášť : Pre druhý plášť nám nevyhovuje ani jeden pár ♥ s Ń, pokým si neuvedomíme, že plášť môže byť aj z rubovej strany. Potom zistíme, že máme zadané steny 5 a 6 otočíme si ho správne a postupujeme rovnako ako pri prvom plášti. Dostaneme:

Bodovanie: správna sieť 2 × 1,7 b (0,3 za krúžky, 0,7 za umiestnenie a 0,7 za správne natočenie), 0,4b - zistenie, že druhý plášť treba prevrátiť a 1,2b za postup.



Príklad M2: opravoval Martin MH Hriňák

Dokážeme si, že pre každé prirodzené číslo n n-poschodová veža obsahuje n x n kociek. Zanedbajme, že ide o kocky a uvažujme len o štvorcoch (na ich počte to nič nezmení, pretože sú len v jednej vrstve za sebou).
Rozdeľme našu pyramídu na dve časti podľa obrázka (tu máme n = 5), teda ju rozdelíme na dve polpyramídy s výškami n a n - 1. Teraz premiestnime malú polpyramídu tak, aby doplnila veľkú na štvorec. To sa dá, lebo má presne taký rozmer (n - 1 x n - 1), ktorý tam chýba. Keďže štvorec so stranou dĺžky n má obsah n x n, tak tým sme dokázali, že na postavenie n-poschodovej pyramídy potrebujeme n x n kociek. To znamená, že na 12, 13, resp 25-poschodovú pyramídu potrebujeme 144, 169, resp. 625 kociek. Keďže milión 1000000 = 1000 x 1000, tak z milióna kociek môžeme postaviť maximálne tisícposchodovú vežu.



Komentár: Väčšina z vás prišla na to, že na n-poschodovú vežu potrebujeme n x n kociek. Zdôvodňovali ste to tým, že to platí pre niekoľko "prvých" čísel 1, 2, 3, 4, 5. To, že to platí tam, nám však ešte nezaručuje, že to platí aj pre väčšie čísla.

Príklad M3: opravoval Palo Cvik

Ahojte! Hmotnosti sôch si označíme takto : A - Antónia, D - Dobroslava, V - Vavrína. To čo povedali sochy o svojich hmotnostiach si zapíšeme pomocou rovníc:
A = D + V/3
D = V + A/3
V = D/3 + 10 . 436 (počet min krát ich hmotnosť)
Dostali sme 3 rovnice o troch neznámych. Pokúsime sa ich postupne upraviť. Najprv z rovníc odstránime zlomky tým, že rovnice vynásobíme tromi. Z tretej rovnice si potom vyjadríme D (D = 3V - 30.436) a dosadíme ho do prvej a druhej rovnice. Dostaneme už iba dve rovnice o dvoch neznámych. Potom si vyjadríme z druhej rovnice A (A = 6V - 90.436) a dosadíme ho do prvej. Dostaneme:
3 . (6V - 90 . 436) = 9V - 90 . 436 + V
18V - 27 . 436 = 10V - 90 . 436
8V = 18 . 436
V = 9 810
Dostali sme teda hmotnosť Vavríny. Túto hmotnosť dosadíme spätne do nášho vypočítaného vzťahu pre A a dostaneme, že Antóniina hmotnosť je 19 620 g. Takisto to dosadíme do nášho vypočítaného vzťahu pre Dobroslavu a dostaneme, že ona váži 16 350 g.

Bodovanie:

za zápis sústavy rovníc v ľubovolnom tvare ... 1b
vyriešenie tejto sústavy (výpočet musel byť na papieri) ... 2b
zdôvodnenie výpočtov a úvah ... 0,5b
výsledok ... 0,5b za každú správnu hmotnosť

Tento príklad patril k tým ľahším a to bolo vidieť aj na vašich úspešných riešeniach. Veľká väčšina z vás sa dopracovala k správnemu výsledku. Ale nie všetci ste získali plný počet bodov. Dosť z vás síce vypočítalo tú sústavu, ale nenapísalo ani slovko vysvetlenia, že čo a prečo vlastne počítali. Za slabé prípadne žiadne zdôvodnenie ste mohli stratiť 0.5b (v prípade že ste mali všetko ostatné dobre). Niektorí ste ešte spravili nejaké chybičky pri svojich úvahách, ale tento príklad dopadol celkom dobre.

Príklad M4: opravoval Martin Nevagi Vagaský

Po chvíľke skúšania asi každý nadobudne presvedčenie, že 13 kameňov 6x6 sa do štvorcovej siete 9x9 rozmiestniť nedá. Pozrime sa prečo je to tak.
Najskôr si asi každý uvedomí, že do jedného riadku (stĺpca) sa nezmestia dva kamene na dĺžku (na výšku) lebo 2x6=12>9. Takže keď umiestnime do ľubovolného riadku 1 kameň, ostanú 3 štvorčeky, ktoré môžeme zaplniť jedine kameňmi postavenými na výšku. Podobne to platí pre stĺpce.
Pozrime sa, čo sa stane keď umiestnime Kameň (s veľkým K) do 4.,5. alebo 6. riadku:
V tých stĺpcoch, v ktorých leží Kameň nemôžeme postaviť žiaden kameň na výšku, lebo pod naším Kameňom je najviac 5 voľných riadkov a nad ním tiež. Preto na výšku môžeme postaviť najviac 3 kamene a to v stĺpcoch, v ktorých neleží náš Kameň.
Koľko kameňov môžeme uložiť po dĺžke? Keďže v každom riadku najviac jeden, a Kameň už v jednom riadku leží, ostáva 8 riadkov a teda 8 kameňov.
Viac kameňov sa do mozaiky nezmestí. Koľko sme ich uložili? 1 (Kameň) + 3 (na výšku) + 8 (po dĺžke) = 12.
Toto je najviac kameňov, keď niektorý leží v 4.,5., alebo 6. riadku.
Rovnako môžeme ukázať, že najviac 12 kameňov sa zmestí do mozaiky, ak je niektorý z nich v 4.,5. alebo 6. stĺpci.
Ešte by bola jedna možnosť a síce keď nie je žiaden kameň v 4.,5., ani 6. riadku a ani v 4., 5. a 6. stĺpci. To však znamená, že v prostriedku mozaiky je prázdny štvorec 3x3 a teda by sme mohli vyplniť len 9x9 - 3x3 = 91 - 9 = 72 štvorčekov. Ale 72 / 6 = 12 a teda v takom prípade by sme určite neumiestnili 13 kameňov.

Bodovanie: 2 body za odpoveď na prvú otázku, po pol bode za myšlienky vedúce k odôvodneniu, za uvedomenie si, že 12 kameňov sa dá umiestniť rôznymi spôsobmi, menej bodov za numerické chyby alebo odpoveď na inú otázku.

Príklad M5: opravovala Kami Vyslocká

Keďže sa snažíme dostať najvyšší súčin, tak v činiteľoch musí byť na mieste stoviek čo najvyššie číslo. Teda máme 9##. 8##. 7## (Lebo z čísel 1,2,…9 sú najväčšie čísla 7,8,9.) Zostalo nám ešte umiestniť 1,2,3,4,5 a 6.
Nájdime miesto pre najmenšie zatiaľ neumiestnené číslo t.j. 1. Je v nejakom činiteli buď na mieste desiatok, alebo na mieste jednotiek (miesta stoviek sú už obsadené). Ten činiteľ si zapíšeme ako ABC. Ak by B bola 1 a C iné (zatiaľ neumiestnené!!!) číslo, bolo by to pre súčin viditeľne nevýhodnejšie ako C=1 a B je to iné číslo. Z rovnakého dôvodu sú čísla 2 a 3 v činiteľoch na mieste jednotiek. Teda máme ##1.##2. ##3 a ešte zistime, v ktorom činiteli sú ktoré čísla. Určite je lepšie násobiť číslom 3 čísla 8a 9 ,než násobiť trojkou čísla 7a 9 alebo 7a 8. Preto umiestnime: 9##.8##.7#3 .
Podobnými úvahami zistíme umiestnenie 2 a nakoniec aj 1. Dostaneme súčin 9#1.8#2.7#3 . Najvyšší zo súčinov:

941.852.763, 941.862.753, 951.842.763, 951.862.743, 961.842.753, 961.852.743 je súčin 941.852.763 = 611721516 (to zistíme násobením).

Bodovanie: Riešenia so správnym výsledkom: za súčin (bez zdôvodnení) - 2b, za vysvetlenie, prečo sú čísla 7,8,9 na mieste stoviek - 3b, za snahu zdôvodniť umiestnenie čísel na mieste desiatok a jednotiek - 4b.
Riešenia s nesprávnym výsledkom: 0,5b až 2,5b podľa správnosti zdôvodnení.

Príklad M6: opravoval Majka Hanulová

Obrovské číslo má 111 cifier, teda hľadané číslo bude mať 11 cifier. Najprv nájdeme najväčšie číslo. Najväčšie 11ciferné číslo je zo samých deviatok. Najväčšie číslo dosiahneme tak, že sa na každú miesto v čísle - rád budeme snažiť dosadiť najväčšiu cifru ako sa dá. Začneme zľava, od najväčších rádov, pretože tie najviac prispievajú k veľkosti čísla. Najväčšie cifry, ktoré sú v obrovskom čísle, sú deviatky. Dáme ich čo najviac do najväčších rádov hľadaného čísla. Celkom je v obrovskom čísle 6 deviatok. Prvých 5 môžeme hneď dosadiť do piatich najväčších rádov. Šiestu musíme dať niekam ďalej, pretože za ňou sú už len dve cifry a tým pádom by nám ostalo menej ako 11 cifier. Dáme ju na najvyšší rád, ako sa dá. Je to rád stoviek (tretie miesto od konca). Tým pádom musíme na posledných dvoch miestach nechať 6 a 0. Ešte nám ostáva obsadiť tri miesta medzi poslednými dvomi deviatkami. Zase začneme od najvyššieho rádu a budeme hľadať čo najväčšiu cifru. Môžeme tam dať 8? Nemôžeme, pretože za ňou je už len jedna cifra a teda by sme neobsadili všetky miesta. Môžeme tam dať 7? Môžeme a aj ju tam dáme. Najväčšia cifra, ktorú môžeme dať na ďalšie miesto, je 8. Dáme ju tam a potom na zvyšné miesto musíme dať 5. Tak a máme hľadané najväčšie číslo: 99999785960.
Teraz hľadajme najmenšie. Začneme znova od najvyšších rádov, ale tentoraz sa tam budeme snažiť dať čo najmenšie cifry. Najmenšie v obrovskom čísle sú nuly a je ich šesť. Päť z nich môžeme hneď dosadiť na prvých päť miest. Šiestu nie, lebo za ňou už nie sú ďalšie cifry a teda nemali by sme ďalej čo škrtať. Necháme si ju teda na poslednom mieste. Je to najvyšší rád kam sa dá uložiť. Hľadáme ešte 5 cifier, ktoré uložíme za prvých päť núl. Začneme obsadzovať od najvyššieho rádu. Po nule je ďalšia najmenšia cifra 1. Môžeme ju napísať na šieste miesto, pretože za ňou je ešte dosť cifier, ktorými môžeme zaplniť zvyšné voľné miesta. Ďalšie najmenšie cifry sú 2,3,4,5 takže nimi obsadíme ostávajúce prázdne miesta (v tomto poradí od najvyšších rádov). Hľadané najmenšie číslo je 00000123450. V prípade, že si povieme, že všetkých 11 nevyškrtnutých cifier musí tvoriť číslo (zo zadania to nebolo jasné), najmenšie číslo je 10000012340. Toto číslo nájdeme rovnakým postupom.

Bodovanie: správne najväčšie číslo 2,5b; správne najmenšie číslo 1,5 b; správne spočítaný počet cifier obrovského čísla 1b; za nesprávne čísla som strhávala do 2b za najväčšie a do 1b za najmenšie podľa toho, ako ste boli ďaleko; za chýbajúci postup som strhla do 2b.