Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

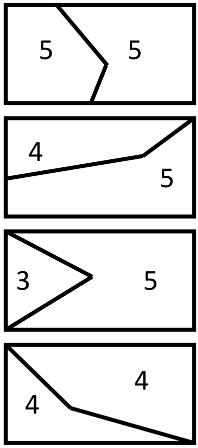
PIKOMAT

30. ročník www.pikomat.sk školský rok 2012/2013

Vzorové riešenia 1. série, kategória 5–6

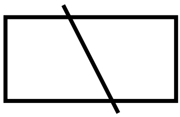
Úloha M1: Brána. *Opravoval Ján Jursa.*

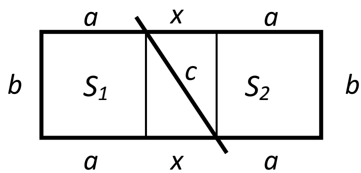
Najprv sa pozrime, ako môže byť náš obdĺžnik rozdelený, aby sme z neho vôbec dostali dva štvoruholníky. Isto uznáte, že oblúky použiť nemôžeme, takže buď použijeme nejakú priamku, alebo lomenú čiaru. Ak použijeme na rozdelenie obdĺžnika lomenú čiaru, tak asi dva štvoruholníky nedostaneme (nejaké spôsoby rozdelenia sú na Obr. 1, v jednotlivých častiach je napísané, koľko-uholníky to sú). Jediný prípad, kedy lomenou čiarou dostaneme z obdĺžnika dva štvoruholníky, je ten spodný – keď je to lomená čiara z jedného vrcholu obdĺžnika do protiľahlého a má presne jeden zlom. Lenže vtedy tie štvoruholníky zjavne nemajú rovnaký obsah – aby mali, musela by tá lomená čiara byť presne uhlopriečkou obdĺžnika, čím by sa „vyrovnal“ jej zlom a tie dve časti by už neboli 4-uholníky, ale 3-uholníky. Lomená čiara s ešte viac zlomami samozrejme už vôbec nemá zmysel, tak by sme dostali ešte-viac-uholníky, takže to nám nepomôže.



Obr. 1

Teda obdĺžnik musel byť rozdelený na dva štvoruholníky **priamkou**. Nejako takto: Obr. 2. Podľa zadania majú tieto štvoruholníky rovnaký obsah. Oba štvoruholníky si môžeme rozdeliť na trojuholník a obdĺžnik (Obr. 3). Tie dva malé trojuholníčky majú zjavne rovnaký obsah, pretože spolu tvoria obdĺžnik rozdelený deliacou priamkou na dva rovnaké trojuholníky. Keď od dvoch rovnakých obsahov štvoruholníkov odpočítame dva rovnaké obsahy trojuholníkov, dostaneme, že aj tie malé obdĺžničky musia mať rovnaký obsah (teda $S_1 = S_2$). No a keďže malé obdĺžničky majú rovnakú jednu stranu (b), tak musia mať rovnakú aj druhú stranu (označíme ju a).


Obr. 2



Obr. 3

No a teraz už môžeme zrátať obvody našich dvoch štvoruholníkov – ten vľavo má obvod rovný $2a+b+c+x$ a ten vpravo $2a+b+c+x$. Takže sme ukázali, že keď majú naše dva štvoruholníky rovnaké obsahy, musia mať aj rovnaké obvody.

Poznámka:

Pozor, naopak to neplatí! Všimnite si napríklad ten posledný obdĺžnik na Obr. 1 rozdelený lomenou čiarou – tam majú štvoruholníky rovnaké obvody, ale nie rovnaké obsahy.

Úloha M2: Čiapky. *Opravoval Martin „Nick“ Smolík.*

Táto úloha sa najlepšie rieši vylučovacou metódou: napíšeme si všetky možnosti, a potom vyškrtáme tie, ktoré nemohli nastať. Možnosti, ako Etel, Oto a Janis mohli mať rozmiestnené klobúky, sú znázornené v tabuľke.

	Oto	**Etel**	**Janis**
1.	Č	Č	Č
2.	Č	Č	M
3.	Č	M	Č
4.	Č	M	M
5.	M	Č	Č
6.	M	Č	M
7.	M	M	Č

Janis videla na oboch svojich kamarátov, takže mohla pred sebou vidieť: buď dve modré čiapky (riadok 7), alebo dve červené čiapky (riadky 1-2), alebo dve rôzne čiapky (riadky 3-6). Jediný prípad, kedy by Janis vedela určit farbu svojej čiapky, je riadok 7 – ak pred sebou vidí dve modré čiapky, žiadne iné modré už nezostali a teda ona musí mať červenú. Janis však povedala, že nevie, akú má čiapku. Z toho je jasné, že pred sebou nemohla vidieť dve modré čiapky. Môžeme teda škrtnúť siedmy riadok.

Etel sa teda dozvedela, že ona a Oto nemajú obaja modrú čiapku. Takže ak by pred sebou na Otovi uvidela modrú čiapku (riadky 5-6), hneď by vedela, že ona už takú istú mať nemôže, a teda že má červenú. Avšak aj Etel povedala, že nevie, akú má čiapku. Preto aj piaty a šiesty riadok môžeme škrtnúť. Ostali možnosti, ktoré sú v druhej tabuľke.

	Oto	**Etel**	**Janis**
1.	Č	Č	Č
2.	Č	Č	M
3.	Č	M	Č
4.	Č	M	M

Vo všetkých má Oto červenú čiapku, teda si môže byť istý, že ju na hlave naozaj má.

Bodovanie:

správna farba Otovej čiapky – 0,5b.; vysvetlenie Janisinej úvahy – 1b.; vysvetlenie Etelinej úvahy – 1,5b.; zvyšné vysvetlenie, prečo Oto musel mať červenú čiapku – 2b.

Úloha M3: Rada. *Opravoval Martin Kristien.*

Aby sa celková suma dala rovnako rozdeliť medzi 12 radcov, musí byť deliteľná 12-timi. 12 = 4·3, takže na to, aby suma bola deliteľná 12-timi, musí byť deliteľná aj tromi aj štyrmi zároveň. Suma musí obsahovať dve jednotky a môžeme pridávať cifry 0 a 5. Keďže hľadaná suma má byť čo najmenšia, budeme sa snažiť pridávať čo najmenej cifier.

Vieme teda, že suma bude obsahovať presne dve jednotky: 1, 1. Aby suma bola deliteľná 3-mi, musí byť jej ciferný súčet deliteľný tromi. Keďže pridanie nuly nám ciferný súčet nezmení, musíme pridať cifru 5. Teraz máme cifry 1, 1, 5. Ciferný súčet je 7, čo stále nie je deliteľné tromi. Pridáme ďalšiu 5-ku. Máme 1, 1, 5, 5. Ciferný súčet je 12, čo deliteľné tromi je. To znamená, že pokiaľ nebude treba, budeme sa snažiť ciferný súčet už nemeniť.

Aby celková suma bola deliteľná štyrmi, potrebujeme párne číslo. Keďže 1 aj 5 sú nepárne, musíme na koniec pridať cifru 0. Po odskúšaní zistíme, že celková suma stále nie je deliteľná štyrmi. Nechceme zmeniť ciferný súčet, preto skúsime pridať ešte jednu nulu. Teraz celková suma deliteľná štyrmi je. Niektorí to možno poznáte ako pravidlo, že aby bolo číslo deliteľné štyrmi, musí byť jeho posledné dvojčíslie deliteľné štyrmi (áno, dvojčíslie 00 je deliteľné štyrmi).

Teraz už máme všetky cifry, ktoré potrebujeme. Treba ich už len usporiadať, aby sme dostali čo najmenšie výsledné číslo. Už vieme, že dve nuly musia byť na konci. Ostatné štyri cifry (1, 1, 5, 5) môžeme ľubovoľne prehadzovať. Aby sme dostali čo najmenšie číslo, musia byť najväčšie cifry čo najviac vpravo. Usporiadame teda cifry v poradí od najmenšej po najväčšiu a pridáme dve nuly na koniec. Tak dostaneme číslo 115500.

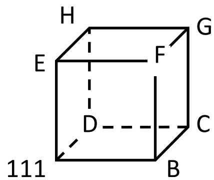
Najmenšiu výplatu jedného radcu dostaneme vydelením celkovej sumy dvanástimi: 115500 / 12 = **9625.** Najmenšia výplata, s ktorou môže každý radca počítať, je **9625**.

Bodovanie:

výsledok – 2b.; deliteľnosť tromi – 1b.; deliteľnosť štyrmi – 1b.; hľadanie najmenšieho možného čísla – 1b.

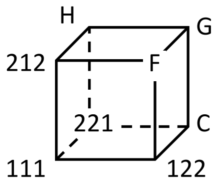
Úloha M4: Nešťastná predavačka. *Opravovali Martin Svetlík a Irena Bačinská.*

V prvom rade sa ubezpečíme, či máme vôbec dosť trojciferných čísel, keď môžeme používať len cifry 1 a 2. Zistíme, že ich je presne 8, konkrétne tieto: 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222. To, že ich je 8, sa nám celkom hodí – je ich presne toľko, koľko je vrcholov kocky, takže každé použijeme práve raz (pretože podľa zadania žiadne nesmieme použiť viackrát).



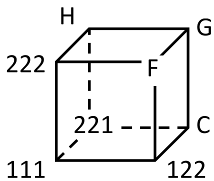
Obr. 1

Keďže tam budú všetky, je jedno, ktorým začneme. Umiestnime napríklad 111 do ľavého dolného predného vrcholu (Obr. 1). Podľa zadania sa čísla v susedných vrcholoch musia líšiť **aspoň** na dvoch miestach, takže so 111 môžu susediť čísla 122, 212, 221 a 222. Keďže každý vrchol susedí s tromi vrcholmi, tak iba jedno z týchto štyroch čísel nakoniec <u>nebude</u> susedom čísla 111. Tieto štyri možnosti teraz musíme vyskúšať.



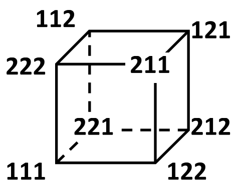
Obr. 2

Prvá možnosť: <u>111 má susedov 122, 212 a 221</u> (Obr. 2). Je jedno, ako ich priradíme do vrcholov B, D a E, pretože rozdielnym priradením dostaneme len inak otočenú, príp. zrkadlovo obrátenú kocku. Teraz skúsime doplniť tie čísla, čo už majú dvoch susedov. Napríklad C, ktoré susedí s 221 a 122. Od oboch sa musí líšiť aspoň na dvoch miestach. Lenže také čísla sú iba 111 a 212 a obe sú už použité. Takže tadiaľto cesta nevedie.



Obr. 3

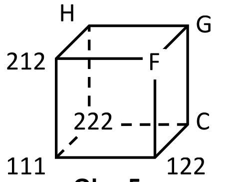
Druhá možnosť: <u>111 má susedov 122, 221 a 222</u> (Obr. 3). Pre vrchol označený písmenom C platí to isté, čo v predošlom odseku – môžu tam byť len čísla 111 a 212. Tentokrát je ale použité len jedno z nich (111). Takže 212 tam môžeme, ba musíme dosadiť. Pozrieme sa na F – jeho susedmi sú zatiaľ 222 a 122, takže tam môže byť len 111 alebo 211. 111 je už použité, tak musíme použiť 211. A vrchol H – ten susedí zatiaľ s číslami 222 a 221, takže tam môže byť len 111 alebo 112. Z toho je voľné iba 112, tak ho použijeme. A do vrcholu G nám ostane číslo 121, vyskúšame teda, či tam môže byť. Môže – hurá, máme prvé riešenie! (Obr. 4)



Obr. 4

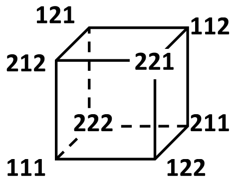
Tu ale príklad nekončí, našli sme jeden spôsob očíslovania, možno ich je viac – veď sme preskúmali zatiaľ len 2 zo 4 možností.

Tretia možnosť: <u>111 má susedov 122, 212 a 222</u> (Obr. 5). Rovnakým postupom ako pri skúmaní druhej možnosti zistíme, že C = 211, F = 221, H = 121 (všetky tri mali druhú možnosť číslo 111, ktoré je už použité). No a potom odskúšame, či zvyšné číslo 112 sedí do vrcholu G. Sedí – máme druhé riešenie! (Obr. 6)



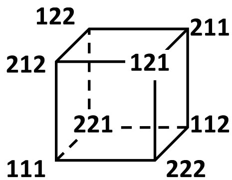
Obr. 5

Štvrtá možnosť: <u>111 má susedov 212, 221 a 222</u>. Opäť zopakujeme postup na hľadanie čísel C, F a H, opäť majú všetky dve možnosti, z toho jedna je (už použitá) 111, takže je to jednoznačné a dostaneme tretie riešenie! (Obr. 7)



Obr. 6

Takže máme tri možné kocky. Spomínate si, ako sme pred pár odsekmi napísali, že keď rozdielne priradíme rovnakú trojicu čísel na vrcholy B, D a E, dostaneme len otočené, alebo zrkadlovo obrátené kocky? Keď je kocka taká istá, len inak otočená, je to tá istá kocka. Avšak zrkadlovo obrátená kocka nie je tá istá, nevieme ju dostať z pôvodnej len otáčaním (resp. pozeraním sa z inej strany).



Obr. 7

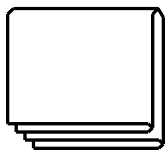
Takže úloha má vlastne 6 riešení – tri sme si tu ukázali, tri sú zrkadlovo obrátené (možno niektorí ste našli tie druhé tri, to je v poriadku). Ale to sme od vás nevyžadovali.

<u>Bodovanie</u>:

8 možných čísel – 1b.; vysvetlenie systému pri umiestňovaní čísel na kocku – 2b.; jedno riešenie – 1b.; zvyšný 1 bod sa dal získať za nájdenie viac riešení (nie nutne všetkých 6, stačili tri, ktoré nie sú navzájom zrkadlovo obrátené).

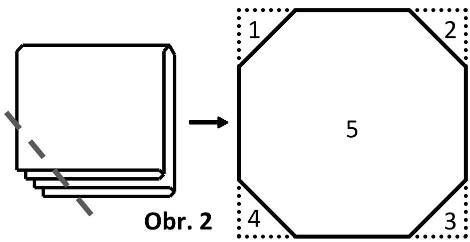
<u>**Úloha M5: Obrúsky.** *Opravovala Kristína „KaTy" Tomová*</u>.

Najdôležitejšie je pozorne si prečítať zadanie a nezabúdať na pravidlo, že obrúsok pri strihaní nesmieme rozkladať ani vkladať nožnice medzi jeho vrstvy. Správne strihať môžeme iba jediným rovným rezom cez poskladaný obrúsok, cez jeho celú hrúbku – cez všetky 4 vrstvy.


Obr. 1

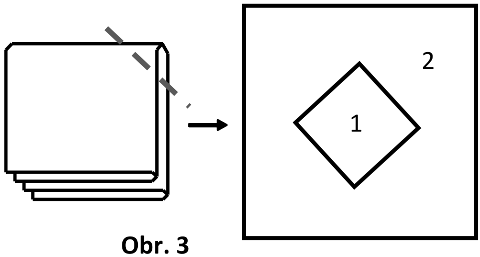
Pri riešení úlohy sú veľmi užitočné obrázky. Tie pomôžu ostatným (a hlavne opravovateľovi) lepšie si predstaviť, ako sme pracovali. Pri používaní obrázkov je dôležité, aby sme si na začiatku ujasnili, čo presne znázorňujú. Na Obr. 1 je znázornený poskladaný obrúsok. Ľavý a spodný okraj tvoria štyri kraje obrúsku. Pravý a horný okraj tvoria dve preloženia – sprava vidíme obe, zhora iba jedno (pretože hore sú tieto preloženia vložené do seba). Aby sa nám to neplietlo, budeme mať celý čas poskladaný obrúsok otočený takto, ako na Obr. 1.

Skúsme najprv obrúsok rozstrihnúť na čo najviac častí. Už na Obr. 1 vidno, že najviac „rozstrapkaný" je ľavý dolný roh. Čo sa stane, keď ho jednoducho odstrihneme? Na Obr. 2 vidíme, že sme vlastne odstrihli všetky 4 rohy pôvodného obrúska, takže obrúsok sa rozdelil na **5 častí** (Obr. 2).



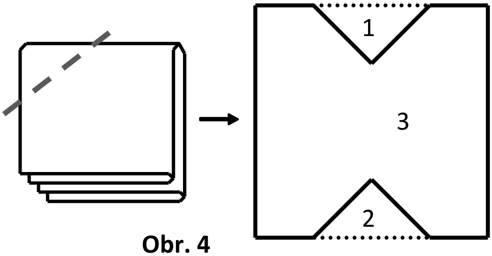
Obr. 2

Naopak, ak by sme chceli obrúsok rozstrihnúť na čo najmenej častí, ponúka sa nám pravý horný roh – ten vyzerá tak „spojito“, že jeho odstrihnutím hádam veľa škody nenarobíme. Na Obr. 3 vidíme, že sme vlastne iba vystrihli kúsok zo stredu pôvodného obrúska, takže obrúsok sa rozdelil na **2 časti** (Obr. 3).



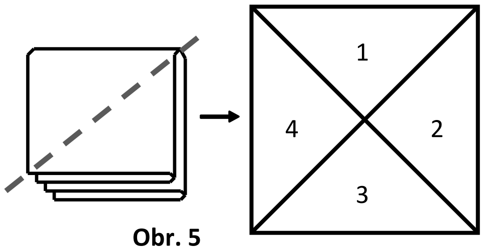
Obr. 3

Keďže strihanie rohov bolo doteraz také úspešné, skúsime v ňom pokračovať a pozrieme sa, čo sa stane, keď odstrihneme pravý dolný alebo ľavý horný roh (tu si ukážeme iba jeden prípad, druhý je veľmi podobný – presvedč sa sám/sama). Na Obr. 4 vidíme výsledok: vystrihli sme časti zo stredov strán pôvodného obrúska, takže obrúsok sme rozdelili na **3 časti** (Obr. 4).



Obr. 4

Aby nám nijaké riešenie neuniklo, vyskúšame aj všetky zvyšné možné spôsoby strihania. Zatiaľ sme vždy skúšali odstrihnúť nejaký roh. Ostáva ešte skúsiť poskladaný obrúsok prestrihnúť vodorovne alebo zvisle – po celej výške alebo po celej šírke. Avšak aj tu sa ľahko presvedčíme, že dostaneme opäť len 3 časti pôvodného obrúska. Dá sa vôbec obrúsok rozstrihnúť na 4 časti? Zabudli sme na nejaký spôsob strihania? Veruže áno!



Obr. 5

Úplne poslednou a doteraz nepreskúmanou možnosťou strihania je rez presne cez dva protiľahlé rohy poskladaného obrúska – po uhlopriečke. Na Obr. 5 vidíme víťazoslávny výsledok: pôvodný obrúsok rozdelený na **4 časti**!

Bodovanie:

vysoko som hodnotila: logický postup; všeobecnosť riešenia – počet nájdených (rôznych) možností; zrozumiteľnosť postupu a obrázkov;

body som strhávala za: neoznačené zloženie obrúska a chýbajúci popis k obrázkom; nezrozumiteľnosť alebo nejednoznačnosť opisu postupu a obrázkov.

p-mat

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

AGENTÚRA NA PODPORU VÝSKUMU A VÝVOJA

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09