Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

30. ročník www.pikomat.sk školský rok 2012/2013

Vzorové riešenia 3. série, kategória 5–6

Úloha M1: Danov dom. *Opravovala Simona „Simča“ Galková.*

Na začiatok treba povedať, že mnohí z Vás v niektorej časti svojho postupu využili meranie dĺžky pravítkom, čo v geometrii nie je celkom správne. Nižšie si o tom ešte niečo povieme. Keďže to však robili mnohí, strhávala som za to iba pol boda. Ale každopádne geometrické úlohy by sa mali riešiť bez merania dĺžok pravítkom či uhlov uhlomerom!

Zo zadania vieme, že Danov dom spolu s Ulicou mieru tvorí rovnoramenný trojuholník. Rovnoramenný trojuholník má dve strany rovnako dlhé – volajú sa ramená, tretia strana sa volá základňa. Keď nájdeme všetky body, ktoré sú od oboch koncov ulice rovnako vzdialené, dostaneme všetky možné polohy Danovho domu. Nájsť ich môžeme pomocou kružidla.

Kružidlo zapichneme do koncového bodu Ulice mieru a urobíme oblúk s polomerom aspoň o trochu dlhším ako polovica základne (ak toto nevieme odhadnúť, môžeme do kružidla naniesť napríklad celú dĺžku základne, tá bude stačiť určite). Potom zapichneme kružidlo do druhého koncového bodu ulice a urobíme oblúk s rovnakým polomerom. Bod, v ktorom sa tieto dva oblúky pretnú, je od oboch koncov základne vzdialený rovnako (kružidlo bolo roztvorené rovnako v oboch prípadoch!), takže s Ulicou mieru tvorí rovnoramenný trojuholník. Ak tento postup zopakujeme viackrát a vždy roztiahneme kružidlo na inú veľkosť, zistíme, že <u>všetky body, ktoré môžu vytvoriť spolu s Ulicou mieru rovnoramenný trojuholník, ležia na jednej priamke</u>, ktorá je kolmá na základňu a prechádza jej stredom.

Rovnakým spôsobom zistíme, kde by mohol byť Danov dom tak, aby vytvoril rovnoramenný trojuholník s Jasnou ulicou. Mnohí z Vás vopred vedeli, že na to treba zostrojiť kolmicu cez stred základne, ten ste však často hľadali pomocou pravítka. Odmerať pravítkom dĺžku základne a vydeliť ju dvoma je nepresné, pretože dĺžka základne nemusí presne zodpovedať niektorej čiarke na našom pravítku. Takže keď sa pokúšame dĺžku vyčísliť, musíme ju vlastne iba odhadnúť, a tak vznikajú nepresnosti. Toto pri postupe pomocou kružidla nehrozí, pretože kružidlo sa dá roztiahnuť na <u>akúkoľvek</u> dĺžku, nemusí sa spoliehať na nejaký obmedzený počet čiarok ako pravítko.

Teraz máme dve priamky. Na jednej ležia všetky body, ktoré tvoria rovnoramenné trojuholníky s Ulicou mieru, a na druhej všetky body, ktoré tvoria rovnoramenné trojuholníky s Jasnou ulicou. Bod, kde sa tieto dve priamky pretínajú, leží na oboch priamkach, teda vytvára rovnoramenný trojuholník aj s Ulicou mieru, aj s Jasnou ulicou. Takže máme riešenie! <u>Danov dom sa nachádza na priesečníku kolmíc, ktoré prechádzajú stredmi Ulice mieru a Jasnej ulice.</u> Na záver jednoduchá otázka: myslíte si, že sa kolmica, ktorá prechádza stredom úsečky, dá nazvať aj inak? Jasné! V geometrii ju poznáme pod názvom os úsečky alebo v tomto prípade os strany. Takže celý čas sme vlastne zostrojovali osi ulíc.

Bodovanie:
správne riešenie – 5b.; za nevysvetlenie, ako ste našli stred, som strhla 0,5b.; ak ste stred odmerali, taktiež som strhla 0,5b.; za nedostatočné zdôvodnenie som strhávala max 2b.

Úloha M2: Počítadlo. *Opravovala Terézia „Glob" Turčanová.*

Už keď sa pozrieme na prvých pár pasažierov a porovnáme to s údajmi na počítadle (prvá tabuľka), je nám jasné, že **keďže počítadlo niektoré čísla preskakuje, určite bude na konci ukazovať väčšie číslo, než počet skutočne prepravených pasažierov.** Ukážeme si dva najčastejšie postupy riešenia, sú si však veľmi podobné.

Pasažier	Pridelené číslo
č. 1	00001
č. 2	00002
č. 3	00003
č. 4	00005
Atď.	...

Zadanie nám hovorí, že počítadlo preskakuje všetky čísla, ktoré obsahujú cifru 4. Preto potrebujeme zistiť, **koľko čísel počítadlo preskočilo, kým sa dostalo na 1005**, a toto množstvo potom od 1005 odčítať. Alebo (druhým spôsobom) naopak zistiť, **koľko čísel vôbec neobsahuje cifru 4**. To potom hneď bude riešením tejto úlohy.

Nuž teda skúsme spočítať, koľko čísel v rozmedzí 1-1005 obsahuje cifru 4. Aby sa nám ľahšie počítalo, čísla od 1 po 1005 si rozdelíme na stovky. V prvej stovke, teda od 1-99, sa cifra 4 nachádza v 19 číslach: 4, 14, 24, 34, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 54, 64, 74, 84, 94. V druhej aj v tretej stovke sa cifra 4 nachádza takisto v 19 číslach. Výnimku tvorí iba stovka čísel 400-499, kde sa cifra 4 nachádza v každom čísle. Ďalej až po číslo 999 sa cifra 4 nachádza tiež v 19 číslach v každej stovke. Nuž a nakoniec v rozpätí čísel 1000-1005 ju máme práve raz, a to v čísle 1004. Celú situáciu môžeme vidieť zhrnutú v druhej tabuľke.

Rozpätie	**Počet čísel s číslicou 4**	**Počet čísel bez číslice 4**
1-99	19	81
100-199	19	81
200-299	19	81
300-399	19	81
400-499	100	0
500-599	19	81
600-699	19	81
700-799	19	81
800-899	19	81
900-999	19	81
1000-1005	1	4
Spolu:	9·19 + 100 + 1 = **272**	1005 – 272 = **733**

Počet všetkých čísel s číslicou 4 je 272. Toľkoto čísel počítadlo preskočilo. Tento počet musíme preto od čísla 1005 odpočítať.
1005 – 272 = **733.**
Vozidlo v skutočnosti prepravilo 733 ľudí.

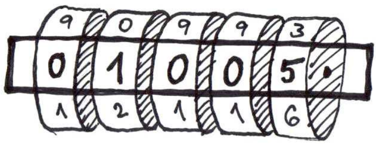
Bodovanie:
akýkoľvek správny postup a zdôvodnenie – 5b.; menšie nedostatky v odôvodnení – 3-4b.; chybné zdôvodnenia, väčšie nedostatky – 0-2b.

Poznámka:

Keďže mnohí mali správne riešenie, ponúkam ešte jeden spôsob, ako sa úloha dala riešiť.

Predstavme si normálne správne fungujúce počítadlo. Má kotúče, ktoré sa vedia otáčať a každý takýto kotúč má na sebe 10 cifier: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Aby počítadlo napočítalo do 10, musí sa samozrejme kotúč na mieste jednotiek posunúť 10-krát. Tým sa dostane opäť na cifru 0, no a kotúč na mieste desiatok sa posunie na cifru 1 – zobrazí sa číslo 10. Aby sa desiatkový kotúč posunul o ďalšie miesto, na cifru 2, musí jednotkový kotúč opäť spraviť „celé kolečko" – zase sa posunúť o 10 číslic. Keď sa trošku zamyslíme, uvedomíme si , že toto platí aj trochu všeobecnejšie: **aby sa <u>ktorýkoľvek</u> kotúč posunul <u>o jednu číslicu</u> ďalej, musí <u>jeho susedný</u> kotúč spraviť <u>celé kolečko</u>**. V našom príklade: aby sa druhý kotúč (poradie uvádzame sprava) dostal na dvojku, musel prvý spraviť dve kolečká, takže sa posunúť $2 \cdot 10 = 20$-krát. Aby sa tretí kotúč posunul o jednu číslicu, musí jeho sused – druhý kotúč – spraviť celé kolečko, čiže sa posunúť 10-krát. Na každé z týchto 10 posunutí sa ale musí ešte prvý kotúč posunúť 10-krát, takže dokopy to bude $1 \cdot 10 \cdot 10 = 100$ posunutí. Tu vidíme, prečo sa jednotlivým miestam v zápise čísla hovorí „miesto jednotiek", „miesto desiatok", „miesto stoviek", „miesto tisícok", atď.

V úlohe M2 bola situácia veľmi podobná. Predstavme si, že 5-ciferné počítadlo vo vozidle sa skladalo z 5 kotúčov, asi ako na obrázku. Teraz má však každý kotúč na sebe <u>iba 9 cifier</u>: 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9.



Ako vidíme, kotúč celkom vľavo (piaty) sa zatiaľ nepohol, preto si ho nemusíme všímať. Kotúč vedľa neho (štvrtý) sa však posunul o 1 cifru. A teraz otázka: koľko posunutí na to bolo celkovo potrebných? My už vieme, že ak sa štvrtý posunul o jednu cifru, musel tretí spraviť jedno kolečko. To znamená 9 otočení tretieho kotúča. Kvôli každému z týchto 9 otočení ale musel kotúč napravo od neho – druhý kotúč – spraviť kolečko, takže druhý musel spraviť $9 \cdot 9 = 81$ posunutí. No a kvôli každému z týchto 81 posunutí musel prvý kotúč spraviť kolečko, takže sa musel posunúť $9 \cdot 9 \cdot 9 =$ <u>729-krát</u>. Takže po odvezení 729 pasažierov počítadlo ukazovalo 1000. Na mieste jednotiek však svieti cifra 5, teda kotúč úplne vpravo sa musel otočiť ešte 4-krát: 0→1→2→3→5. Spolu 729 + 4 = **<u>733 posunutí počítadla</u>.**

Hurá, prišli sme k rovnakému výsledku. Počítadlo narátalo 733 ľudí.

Úloha M3: Perníky. *Opravovala Kristína „Krisa" Faguľová.*

Vieme, že rodina, ktorá odišla na dovolenku, tvorí 1/3 známych Danových rodičov. Takže ak zistíme, koľko má dovolenkujúca rodina členov, dozvieme sa tiež, koľko známych majú Danovi rodičia dokopy.

Na konci mesiaca zostalo 120 perníkov pôvodne určených pre túto rodinu. Rodina odcestovala 16. januára večer, teda prvé raňajky, ktoré vynechala, boli <u>17. januára</u>. Dovolenka trvala do konca mesiaca, teda do <u>31. januára</u>. Z toho vyplýva, že rodina <u>vynechala 15 raňajok</u>.

Z toho vieme zistiť, že pre rodinu bolo každý deň určených 120/15 = 8 perníkov. Každý človek zje na raňajky 2 perníky, takže rodina má 8/2 = 4 členov. Keďže rodina tvorí 1/3 všetkých známych, počet všetkých známych Danových rodičov je 4·3 = **12 členov**.

Bodovanie:

správne riešenie – 3b.; dostatočný slovný komentár – 2b.

Poznámka:

Viacerí ste nám ako riešenie poslali len zopár rovníc a riešeniu chýbal komentár. Preto nabudúce opíšte svoj postup aj slovne, aby sme sa aj skutočne dozvedeli, ako ste pri riešení postupovali.

Úloha M4: Hodiny. *Opravovala Veronika Jankovičová.*

Ukážeme si tri spôsoby riešenia:

Prvý spôsob: Rozdelíme si ciferník na trojice tak, aby sa neprekrývali. Takéto trojice vieme nájsť 4. Teraz predpokladajme, že žiadna trojica nemala súčet vyšší ako 18. To znamená, že celkový súčet všetkých štyroch trojíc by mohol byť najviac 4·18 = 72. Avšak súčet čísel na ciferníku je 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78.

To je problém. Preto náš predpoklad, že žiadna trojica nemala súčet väčší ako 18, nemohol byť správny. Takže odpoveď: Igor mal pravdu, na hodinách skutočne určite bola aspoň jedna trojica so súčtom väčším ako 18.

Druhý spôsob: Na hodinách vieme nájsť 12 rôznych trojíc. Prečo? Keď vyznačíme jednu trojicu a potom sa posúvame zakaždým o jedno číslo doprava, tak postupne prejdeme po všetkých dvanástich číslach na ciferníku a označíme 12 trojíc.

Opäť predpokladajme, že žiadna trojica nemala súčet vyšší ako 18. Potom by najväčší možný súčet všetkých 12-tich trojíc mohol byť 12·18 = 216.

Pri spočítaní týchto všetkých trojíc sme každé číslo započítali 3-krát (raz, keď bolo v rámci trojice naľavo, raz, keď bolo v rámci trojice v strede, a raz, keď bolo v rámci trojice napravo). Avšak súčet všetkých čísel na ciferníku vynásobený troma je (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12)·3 = 234.

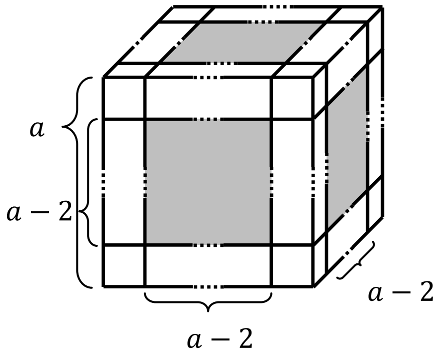
Opäť vidíme, že súčet trojíc je menší ako súčet všetkých čísel, ktoré sú na hodinách. Takže opäť náš predpoklad, že žiadna trojica nemala súčet väčší ako 18, bol nesprávny. Na hodinách skutočne musela byť aspoň jedna trojica so súčtom väčším ako 18.

Tretí spôsob: Aj teraz skúsme vyrobiť také hodiny, na ktorých nebude žiadna trojica mať súčet väčší ako 18. Pozrieme sa najprv na štvoricu najväčších čísel: 12, 11, 10 a 9. Žiadne dve nemôžeme dať spolu do trojice, lebo to by hneď prekročil 18. Rozostavíme ich teda tak, aby medzi nimi vždy boli 2 voľné miesta. Teraz však kamkoľvek umiestnime číslo 8, určite bude spolu v trojici s dvoma číslami z našej najväčšej štvorice. Avšak aj keby sme ho dali medzi dve najmenšie: medzi 9 a 10, je to problém. Totižto keď sú 8 a 10 spolu v trojici, tak akonáhle do tejto trojice umiestnime tretie číslo, súčet presiahne 18. Takže opäť sme sa dopracovali k záveru, že čísla sa na hodinách nedajú usporiadať tak, aby nevznikla trojica so súčtom väčším ako 18.

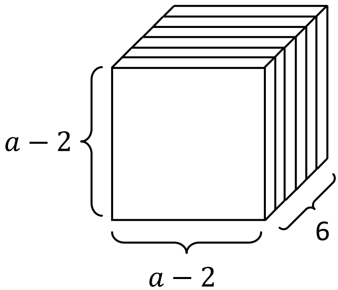
Bodovanie:

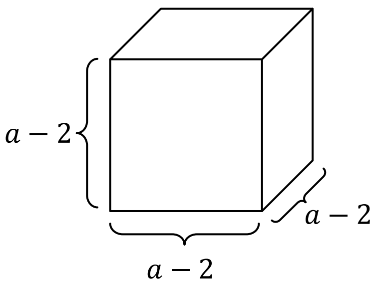
Všetky strhnutia bodov sú odôvodnené priamo v riešeniach; za napísanie iba odpovede „Igor mal pravdu“ som udeľovala 0,5b.

Úloha M5: Kocky. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*



Začneme tým, že sa pozrieme, ktoré kocočky sú bez červenej steny a ktoré majú práve jednu červenú stenu. Keď si načrtneme kocku, vidíme, že rohové kocočky majú zafarbené 3 steny. Kocočky, čo ležia na hranách pôvodnej kocky (okrem rohových), majú zafarbené 2 steny. Kocočky, čo ležia v stredoch stien veľkej kocky, majú červenú len jednu stenu – na obrázku sú to sivé vyznačené oblasti (takéto isté oblasti sú aj na zadnej, spodnej a ľavej stene veľkej kocky, iba ich na obrázku nevidíme). No a na koniec: všetky vnútorné kocočky nemajú červenú ani jednu stenu.





Nás teda zaujímajú sivé oblasti, ktoré sú tvorené kocočkami s jednou červenou stenou. Tých je 6 a majú rozmery *(a – 2)×(a – 2)*. Predstavme si týchto 6 oblastí položených za seba. Vedľa toho si predstavíme vnútro pôvodnej veľkej kocky, teda všetky kocočky, ktoré nemajú žiadnu červenú stenu. Zo zadania vieme, že tieto dve skupiny kocočiek musia obsahovať rovnako veľa kocočiek. Tak sa na ne bližšie pozrieme.

Výšku aj šírku majú rovnakú, *(a – 2)* kocočiek, takže rozhodujúca je hĺbka (počet vrstiev smerom dozadu). Na to, aby boli celé telesá rovnaké (aby obsahovali rovnako veľa kocočiek), musí byť aj hĺbka rovnaká, takže *(a – 2) = 6*, takže *a = 8*. **Pôvodná kocka teda obsahovala 8·8·8 = 512 kocočiek.**

Bodovanie:

body som strhával za nepresnosti a nejasnosti v postupe.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09