debien (je jedno či je v nich mäso alebo zemiaky). Teda na splnenie tretej podmienky museli odniesť aspoň 54 debien.

Na splnenie 1. podmienky museli odniesť aspoň 52 debien, na splnenie 2. podmienky aspoň 55 a na splnenie 3. podmienky aspoň 54, čiže na to aby s určitosťou splnili všetky tri podmienky, museli odniesť aspoň 55 debien.

Bodovanie: Za úplne správne riešenie aj s podrobným postupom samozrejme 5 bodov. Za správne riešenie s postupom, ale malou chybou (napr. neuvedomenie si faktu, že „aspoň“ znamená $\geq$, a nie $>$), je 4,5 bodu. Za správny postup, ale zlý výsledok sú 4 body. 2 body sú buď správne riešenie, ale nedostatočný postup, alebo riešenie so síce zlým výsledkom, ale dobrým postupom. V prípadoch, keď ste nebrali do úvahy niektoré z troch podmienok v zadaní, alebo ste ich zle interpretovali, dostali ste tiež dva body.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára

PIKOMAT

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Cela. *Opravovala Diana „Dee“ Odrobináková.*

Príklad ste riešili viacerými spôsobmi, uvádzam ten najjednoduchší a zároveň ten, ktorý sa mi páčil najviac. Najskôr ste si mali uvedomiť, že keď sčítate všetky čísla zo zadania, každý uhol bude zarátaný práve dvakrát. Po vydelení dvoma teda dostanete súčet vnútorných uhlov v sedemuholníku, čo je 900°. Ak súčet ľubovoľných troch dvojíc uhlov zo zadania, kde sa žiadne uhly neopakujú, odčítate od 900°, dostanete posledný, siedmy uhol. Uhol w môžeme teda vyrátať ako $900°-(a+b)-(g+d)-(e+f)=900°-257°-243°-303°=900°-803°=97°$. Vypočítali ste uhol w a ostatné ste už mohli dopočítať pomerne jednoducho: $a=253°-97°=156°$; $b=257°-156°=101°$; $g=224°-101°=123°$; ďalej máme $d=243°-123°=120°$; $e=286°-120°=166°$; $f=303°-166°=137°$. Z toho vám už bolo jasné, že najmenší uhol v sedemuholníku je w, ktorý má veľkosť 97°.

Bodovanie: Za výsledok ste mohli dostať dva body. Ak ste si zvolili tipovaciu metódu, strhala som body za postup, keďže tam obvykle žiaden nebol. Za logické úvahy ste mohli dostať max. 2,5 boda. Posledný polbodík bol za slovný komentár, ktorý však mnohým z vás chýbal.

Príklad S2: Cesta. *Opravoval Michal „Kladivo“ Kováč.*

Mnohí ste si všimli, že v zadaní bola drobná chybička – do našej tlačiarne sa vkradol tlačiarensky škriatok a cesta medzi súdom a hostincom nemala pri sebe dĺžku. Pochopili ste to rôzne, preto som sa snažil hodnotiť objektívne a nestrhával som body za rôzne pochopenia príkladu. Aj keď sa to malo riešiť všeobecne pre ľubovoľnú dĺžku, niektorí ste ju vypočítali ako keby to boli trojuholníky alebo ste ju ohraničili trojuholníkovou nerovnosťou, alebo ste si túto dĺžku jednoducho zadali. Niektorí ste ju jednoducho ignorovali, čo je v podstate to isté, ako keby dĺžka tejto cesty bola taká veľká, že sa ňou neoplatí ísť.

Ja tu ale uvediem riešenie pre ľubovoľnú dĺžku, označím si ju x. Watson začína na súde, končí na súde, musí prejsť cez hostinec, prístav, trh a poštu. Zatiaľ však nevieme, v akom poradí. Nakreslime si tabuľku, v ktorej sú napísané najkratšie vzdialenosti medzi každými dvoma miestami.

Ako ich zistíme? Existuje na to pár postupov, ktoré tu popisovať nejdem. Prinajhoršom preskúmame všetky možnosti cesty a vyberieme najkratšiu – musíme si však dať pozor na to, že nevieme, koľko je *x*, preto dĺžka cesty závisí na potenciálnej hodnote *x*. Značka *Min(a,b)* znamená *minimum z čísel a, b*.

	Súd	**Hostinec**	**Pošta**	**Trh**	**Prístav**
Súd	0	*Min(x,22)*	9	7	11
Hostinec	*Min(x,22)*	0	*Min(9+x,13)*	*Min(7+x,26)*	*Min(11+x,17)*
Pošta	9	*Min(9+x,13)*	0	13	20
Trh	7	*Min(7+x,26)*	13	0	11
Prístav	11	*Min(11+x,17)*	20	11	0

Pravdepodobne najjednoduchšou alternatívou je opäť sa pozrieť na všetky možné cesty, a vybrať z nich tú najkratšiu (pozor, teraz len zrátavame hodnoty v tabuľke... najkratšia cesta medzi doma miestami nemusí byť tá priama!). Nesmieme zabudnúť na to, že najkratšia cesta sa môže úplne zmeniť, pokiaľ sa zmení hodnota *x*. Týchto možností je 24 (prečo to tak je?). Skúste si to urobiť sami doma, aspoň uvidíte, ako sa riešenie úlohy môže zmeniť zmenou jediného čísla v zadaní ☺.

Keď to všetko vyrátame, zistíme, že v závislosti na dĺžke *x* je najkratšia cesta:
x<4: Dĺžka je *44+2x* pre trasu Súd-Prístav-Trh-Pošta-Hostinec-Súd, pričom z pošty do hostinca sme išli skratkou cez súd, teda celá trasa je **Súd-Prístav-Trh-Pošta-Súd-Hostinec-Súd.** Dá sa ísť samozrejme aj od konca.
4≤x<6: Najlepšie je ísť podobne ako predtým, ale z pošty do hostinca nepôjde Watson cez súd, ale priamo, prejde vzdialenosť *48+x*.
6≤x<18: Pôjde buď tak ako v predchádzajúcom prípade, alebo keď *x>9*, výhodnejšie je ísť **Súd-Pošta-Hostinec-Prístav-Trh-Súd,** čo má dĺžku *57*.
19≤x: Tiež je najvýhodnejšia trasa s dĺžkou *57*.

Bodovanie: Za správny výsledok pre ľubovoľné pochopenie príkladu boli 2 body (nabudúce už budem uznávať len riešenia pre všetky *x*). Zvyšné body sa dali získať za postup, keď ste vypisovali všetky možnosti, často sa vám stávalo, že ste ich nevypísali všetky, alebo ste v nich nemali systém, a väčšina zabudla na to, že sa môže ísť po jednej ceste aj dvakrát.

Príklad S3: Holmesova úloha. *Opravovala Kaťa Smolárová.*

Máme uvažovať o číslach menších ako 10. Hneď na začiatku môžme vylúčiť všetky záporné čísla a nulu, pretože zadanie pre ne nemá zmysel.

V zadaní máme nasledujúce dve podmienky:
1. Súčin ľubovoľných *n* za sebou idúcich čísel je deliteľný *n*.
2. Súčet ľubovoľných *n* za sebou idúcich čísel je deliteľný *n*.

Najprv sa poďme pozrieť na prvú podmienku. Vieme, že čísla deliteľné *K* sa vyskytujú v rozstupoch dĺžky *K* (napríklad každé piate číslo je deliteľné piatimi). To znamená, že keď máme ľubovoľných *K* za sebou idúcich čísel, tak vieme, že aspoň jedno z nich musí byť deliteľné číslom *K*. Keď je jeden činiteľ

Už vieme, ktorý team môže skončiť na ktorom umiestnení, a po aplikovaní pravidla, že vo štvrťfinále sa hrá „na kríž“ získame tieto možné dvojice:
Ch bude hrať s jedným z dvojice *Wa* a *F*, a každý z trojice *Wi*, *T*, *P* môže hrať proti hociktorému z trojice *E*, *L*, *N*.

Komentár k došlým riešeniam: Zaujímavé je, že keby sme začali skupinou B, a zistili by sme, ako to bude vyzerať (že tri tímy môžu byť na hociktorom z miest 1,2,3), tak by nám to zjednodušilo prácu so skupinou A – tam by nám stačilo vedieť, že Charlton bude určite prvý, a ktoré ďalšie tímy postúpia – bolo by nám jedno, z ktorého miesta môžu/nemôžu, lebo aj tak by sa mohli stretnúť s hociktorým z trojice *Wi, T, P*. Teoreticky ani teraz sme nemuseli rozmýšľať nad všetkými možnosťami, ale vo vzorovom riešení to radšej uvádzam, aby to bolo úplne jasné. Čo sa týka vašich riešení, rekordné malo 13 strán...

Bodovanie: Za správne riešenie s odôvodnením som dával 5 bodov. Podľa (ne)správnosti postupu som strhával bodíky. Ak ste mali riešenie s tým, že Middlesbrough postúpi, alebo že Watford nemôže postúpiť, strhával som okolo jedného bodu (podľa postupu). Ak ste uviedli len tie 4 možné dvojice, ktoré by hrali za súčasného stavu (keby sa už žiadne zápasy nehrali), dostali ste maximálne 1 bod.

Príklad M5: Sklad. *Opravovali Katarína „Kitty“ Korcsoková, Jarmilka Malíková a Kristína „Kika“ Blažková.*

V prvom rade si musíme uvedomiť, že námorníci nevideli nápisy na debnách, teda nemohli s určitosťou povedať, čo ktorá debna obsahuje. Ich úlohou bolo zobrať najmenší taký počet debničiek, aby splnili všetky tri šéfove podmienky:

1.podmienka: Odniesť viac debien s mäsom ako s rybami.
Aby si boli istí, že splnili túto podmienku, museli rátať s najhoršou možnosťou, že najprv zobrali všetky debny s múkou (9), jablkami (11) a zemiakmi (17), zároveň aj všetky debny s rybami (7), čiže dokopy ich bolo 44. A potom museli odniesť ešte aspoň 8 debien mäsa, aby mali viac debien s mäsom než s rybami. Čiže na to, aby s určitosťou splnili 1. podmienku, museli odniesť aspoň 52 debien.

2.podmienka: Mali odniesť viac debien so zemiakmi než s jablkami.
Opäť museli rátať s najhoršou možnosťou, teda že najprv odniesli všetky ostatné suroviny okrem zemiakov (t.j. múka (9), mäso (16), ryby (7), jablká (11)). Aby splnili podmienku museli odniesť plus ešte minimálne 12 debien so zemiakmi. Dokopy je to 55 debien *(9+16+11+7+12).*

3.podmienka: Počet debien s mäsom alebo zemiakmi mal byť aspoň taký ako počet debien s ostatnými potravinami, teda: zemiaky + mäso ≥ jablká + múka + ryby. Opäť museli rátať s najhoršou možnosťou, že by najprv odniesli všetky debny s jablkami (11), múkou (9) a rybami (7), teda spolu 27 debien. Následne museli odniesť ešte aspoň 27 súčinu deliteľný *K*, tak potom musí byť celý súčin deliteľný *K*. Za *K* si môžeme teda doplniť ľubovoľné vhodné číslo. Podmienka 1. je splnená pre každé číslo 1-9.

Teraz poďme zistiť, pre ktoré *n* platí druhá podmienka. Ľubovoľných *n* za sebou idúcich čísel vieme zapísať ako $x+0$, $x+1$, $x+2$, …, $x+(n-1)$, kde *x* je nejaké číslo. Snažíme sa zistiť súčet týchto *n* členov. Keďže máme *n* sčítancov, kde sa v každom *x* nachádza práve raz, *x* sa v tomto súčte nachádza *n*-krát. To znamená, že výsledný súčet by sa dal napísať v tvare $n.x+(0+1+2+3+\ldots+(n-1))$. Vidíme, že $n.x$ je deliteľné *n* a teda to, či je súčet deliteľný *n* bude závisieť od toho, či bude *n* deliteľný súčet v zátvorke. Urobme si tabuľku:

n	zátvorka	súčet v zátvorke
1	0	0
2	0+1	1
3	0+1+2	3
4	0+1+2+3	6
5	0+1+2+3+4	10
6	0+1+2+3+4+5	15
7	0+1+2+3+4+5+6	21
8	0+1+2+3+4+5+6+7	28
9	0+1+2+3+4+5+6+7+8	36

Súčet v zátvorke je deliteľný *n* pri nepárnych číslach, a teda druhá podmienka platí pre všetky nepárne čísla.

Všetky *n*, pre ktoré platia dané podmienky sú 1, 3, 5, 7 a 9.

Bodovanie: Za nájdenie a odôvodnenie prvej podmienky ste mohli získať 2 body, za nájdenie a odôvodnenie druhej podmienky 3 body. Bod z každej podmienky bol za to, že ste ukázali, že to bude platiť pre ľubovoľnú *n*-ticu, nie len pre nejakú konkrétnu.

Príklad S4: Turnaj. *opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

V prvom rade si musíme povedať, že nemôžeme určovať poradie len z už odohraných zápasov, tento stav bude pre nás len východiskom. Musíme sa zamyslieť, čo s týmto východiskovým poradím spravia zápasy, ktoré sa ešte len budú hrať – či sa niektoré družstvo nemôže výhrou dostať na lepšie umiestnenie... A nemôžeme vedieť, kto ktorý zápas vyhrá (ani keď je niekto papierový favorit), šport je nevyspytateľný, musíme uvažovať o všetkých možnostiach.

Čo vlastne máme zistiť? Keďže otázka znie: *„Aké dvojice sa môžu stretnúť?“*, a nie: *„Ako môže vyzerať štvrťfinálový rozpis?“*, tak nepotrebujeme vedieť presne, či môžu niektoré veci nastať súčasne, ale stačí nám, že či dané družstvo môže obsadiť určité umiestnenie. Podľa toho budeme vedieť, kto sa s kým môže stretnúť.

Na začiatok je vhodné vytvoriť si tabuľky oboch skupín, aby sme sa mohli lepšie orientovať v priebehu turnaja. Mužstvá si označíme prvými písmenami.

	B	L	Ch	M	N	E	b	Skóre
B		2 : 7	0 : 6	3 : 3	1 : 4	:	**1**	6 : 20
L	7 : 2		0 : 2	5 : 1	:	0 : 2	**4**	12 : 7
Ch	6 : 0	2 : 0		:	4 : 2	5 : 0	**8**	17 : 2
M	3 : 3	1 : 5	:		1 : 4	2 : 2	**2**	7 : 14
N	4 : 1	:	2 : 4	4 : 1		2 : 3	**4**	12 : 9
E	:	2 : 0	0 : 5	2 : 2	3 : 2		**5**	7 : 9

Toto je tabuľka ***skupiny A***. Keďže každému ostáva už len jeden zápas do konca, je jasné, že pri akomkoľvek priebehu bude *Ch* prvý v skupine, a *B* nepostúpi, ani keby získal ďalšie dva body. Keby *M* získal dva body, mal by rovnako, ako teraz *L* a *N*. Ale aj *L*, aj *N* porazili *M*, takže nech skončí ich vzájomný zápas hocako, obe družstvá postúpia, a *M* nepostúpi. *E* môže byť druhý (ak vyhrá, ale aj ak remizuje, pretože aj nad *L*, aj nad *N* vyhral, takže ak by *L* alebo *N* vyhral, mal by s *E* zhodne po 6 bodov, a rozhodol by tento vzájomný zápas), alebo tretí (ak prehrá, a v zápase *L – N* nenastane remíza, vtedy bude druhý víťaz tohto zápasu, a porazený skončí štvrtý). Zaujímavá situácia nastane, ak *E* prehrá, a zároveň *L – N* sa skončí remízou. Vtedy budú mať *E*, *L* a *N* zhodne po 5 bodov. Vtedy podľa pravidiel rozhoduje vzájomný zápas, ktorých je ale viac (keďže sú to tri družstvá). *E* ale vyhral nad oboma súpermi, takže z tejto skupinky by bol prvý, druhý by bol *L*, tretí *N*. *E* teda v žiadnom prípade 4. neskončí.
Možné postupové umiestnenia v tejto skupine sú 1-*Ch*, 2-*E,L,N*, 3-*E,L,N*, 4-*L,N*.

	B	Wi	T	P	F	Wa	b	Skóre
B		2 : 7	0 : 1	1 : 2	1 : 4	:	**0**	4 : 14
Wi	7 : 2		0 : 5	:	2 : 1	6 : 1	**6**	15 : 9
T	1 : 0	5 : 0		3 : 5	:	9 : 2	**6**	18 : 7
P	2 : 1	:	5 : 3		2 : 1	6 : 3	**8**	15 : 8
F	4 : 1	1 : 2	:	1 : 2		3 : 3	**3**	9 : 8
Wa	:	1 : 6	2 : 9	3 : 6	3 : 3		**1**	9 : 24

Skupina B: V tejto skupine je jasné, že *B* nepostúpi, ani keby vyhral. Zato ak by vyhral *Wa*, a *F* by prehral, môže byť *Wa* štvrtý, lebo by mali s *F* rovnako bodov, vzájomný zápas remízu, a aj keď teraz má lepšie skóre *F*, v teoretickej rovine ho po tomto zápase môže mať lepšie *Wa* (ak by *F* prehral o *x*, a *Wa* by vyhral o *y*, tak ak $x + y > 16$, tak postúpi *Wa*…). Ani keby *F* vyhral, nebol by lepšie ako štvrtý, pretože to by mal len 5 bodov… Štvrtý teda bude buď *Wa*, alebo *F*. *Wi* može byť prvý (keď vyhrá, a zároveň *T* nevyhrá), druhý (keď remizuje, a zároveň *T* prehrá), alebo tretí (keď prehrá). *T* môže byť tretí (keď prehrá, a *Wi* neprehrá), druhý (napr. keď vyhrá, a *Wi* nevyhrá). *P* môže byť prvý (keď neprehrá), alebo druhý (keď prehrá, a *T* nevyhrá). Teda zatiaľ nevieme, či *P* môže byť tretí, a *T* prvý, lebo sme nepreskúmali situáciu, keď budú mať tri teamy zhodne po 8. (Všetky ostatné situácie sme preskúmali, a všetky ostatné možnosti sú možné). Pozrime sa teda na to, keď *Wi* aj *T* vyhrajú. Zatiaľ ich situácia vyzerá takto (tabuľka). *Wi* vyhrá, a teda bude mať tiež dva body. Každý z trojice *Wi*, *T*, *P* bude mať vo vzájomnom porovnaní jednu výhru a jednu prehru. Rozhodne teda vzájomné skóre. To bude prvý *T*. Ak *Wi* vyhrá o 4 alebo viac gólov, bude mať lepšie skóre ako *P* (*Wi*-4:5, *P*-5:7), takže *P* bude tretí. Ak ale *Wi* vyhrá o viac ako 8 gólov, bude mať lepšie skóre aj ako *T*, teda bude prvý.

	Wi	T	P	b	Skóre
Wi		0 : 5	:	0	0 : 5
T	5 : 0		3 : 5	2	8 : 5
P	:	5 : 3		2	5 : 3

Teda v konečnom poradí môže byť každý z trojice *T*, *P*, *Wi* prvý, druhý, alebo tretí.

Možné postupové umiestnenia v tejto skupine sú 1-*Wi,T,P*, 2-*Wi,T,P*, 3-*Wi,T,P*, 4-*Wa,F*.