Príklad S4: Plachtu *opravoval Jožo Cibíček*

Trojuholníky ABS a CDS sú podobné (jeden uhol vrcholový a 2 striedavé). Koeficient podobnosti strán týchto trojuholníkov označme k. Potom môžeme zapísať: CD = c = k.a, v_c=k.v_a (v_a , v_c sú výšky v spomínaných Δ). Pomer obsahov týchto Δ–kov je zo zadania 9/4 teda platí: (a. v_a / 2) / (k .a .k .v_a / 2) = 9/4 , kde vieme, že obsah ΔABS (a. v_a / 2) = 9cm^2. Po dosadení a vypočítaní rovnosti dostávame k = 2/3. Preto ak AB = 18cm, tak CD = 12cm, následne z obsahu ΔABS môžeme vypočítať výšku v_a (18 / (2.9) = 1cm). Potom v_c = 2/3 cm. Výška celého lichobežníka je potom 1 + 2/3 = 5/3cm a jeho obsah teda: ((18+12).5/3)/2=25cm^2. Keďže obsahy oboch bielych častí sú zadané a majú spolu 13cm^2, tak obsah červených musí byť 12cm^2 , čo je 12/25 (48%) z celej plachty.

Bodovanie*:* výsledok: 1b, postup: 4b, aspoň za vypočítanie výšky trojuholníka ABS: 0,5 b, za dokázanie podobnosti trojuholníkov ABS, CDS, resp. za dokázanie zhodnosti obsahov trojuholníkov BCS, DAS, ak ste niektorý z poznatkov využívali neskôr: 1b, za nejaké odmeranie alebo dosádzanie celočíselných hodnôt, ktoré by mohli sedieť pre nejakú stranu: spolu max. 0,5 b (iba ak by ste si tipli správne (to sa nepodarilo nikomu) a ukázali, že iné tipy sú zlé, by ste mohli mať viac). Za použitie neplatného vzťahu: „pomer obsahov podobných trojuholníkov = pomer ich strán“: -2b , za nevyjadrenie požadovaného pomeru resp. percenta (v zadaní sa pýta na nejakú časť z celku – teda zlomok, odpoveď 12 nestačí): -0,3b, za iné menšie nepresnosti: – nejaké tie desatinky.

Príklad S5: Číselnú hádanku *opravoval Peter „Comp“ Ambrož*

Poslednú cifru si označím *y* a zvyšok čísla *x*. Celé číslo môžem vyjadriť vzorcom $x.10+y$. Urobím rozdiel x^2 - y^2 a musí mi vyjsť pôvodné číslo, takže dostanem rovnicu $x^2 - y^2 = x.10+y$, ktorú ďalej upravujem na $x^2 - 10.x = y^2 + y$ a ďalej $x\ (x - 10) = y\ (y + 1)$. *y* je jednociferné, čiže 0,1,2,..., alebo 9. Preto bude celá pravá strana rovnice kladná, alebo rovná nule. Ak si povieme, že číslo nezačína nulou, potom *x* bude aspoň 10 (aby *x* – 10 nebolo záporné). Urobím si tabuľky, z nich bude vidno, aké hodnoty môžu nadobúdať obe strany rovnice.

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(*y* + 1)	**0**	2	6	12	20	30	42	**56**	72	90

X	10	11	12	13	14	15
x(*x* – 10)	**0**	11	24	39	**56**	75

Keďže najväčšia hodnota pre pravú stranu je 90, potom *x* môže byť maximálne 15. Ak by bolo väčšie, ľavá strana rovnice by už prevyšovala pravú stranu. Z tabuľky vidno dve možné riešenia: 100 a 147. Zadanie sa dalo pochopiť aj tak, že môžeme odčítavať v opačnom poradí, teda $y^2 - x^2$. V takom prípade je riešením aj 48. Veď si to sami zrátajte. Uznával som oba postupy.

Bodovanie: 4 body postup ak bol správny a kompletný. 1 bod za výsledok, ak ste našli 147, alebo 48. Menej jasné postupy za 2,5 až 2 body. Náznaky správnosti v nedotiahnutom postupe – 0,5 až 1 bod.

Vzorové riešenia 2. série letnej časti kategórie 7-9

organizátor korešpondenčného seminára

podporuje odborný rast organizátorov seminára

Príklad S1: Londýnsku MHD *opravovala Táňa Viszusová*

Vyskytovali sa najmä dva pekné spôsoby riešenia.
Preto tu uvediem oba (aby ste si mohli rozširovať svoje matematické obzory...:-)).

Spôsob 1: Najprv zistíme, koľko najviac fiakrov môže stáť na jednej zastávke. Po krátkom zamyslení zistíme, že na jednej zastávke môžu stáť najviac 4 fiakre (lebo túto jednu už majú všetky navzájom spoločnú a teda každý musí ísť teraz na iné dve, (9-1):2 = 4). Zastávok je dohromady 9, na každej môžu stáť najviac 4 fiakre, teda je 36 príležitostí pre zastavenie fiakrov, no a keďže každý fiaker stojí na troch zastávkach (teda využije tri možnosti na zastavenie), tak najviac môže premávať 36:3 = 12 fiakrov.

Spôsob 2: Označíme si zastávky číslami 1 až 9. Každý fiaker stojí vlastne na troch dvojiciach zastávok (napr. fiaker stojaci na zastávkach 4, 3, 8 stojí na dvojiciach 4, 3 potom 3, 8 a 4, 8). Žiadne dva fiakre nemôžu zdieľať spoločnú dvojicu zastávok (nebola by dodržaná podmienka zo zadania). Všetkých dvojíc zastávok je 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36 (skúste si ich vypísať – 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 34, 35, ..., 78, 79, 89). Každý fiaker minie tri rôzne dvojice, čiže najviac môže premávať 36:3 = 12 fiakrov.

Teraz ešte na overenie našich výsledkov nájdeme vhodné rozostavenie, ktorý fiaker kde stojí. Popíšem to iba číslami zastávok. Takže: 123, 456, 789, 147, 158, 169, 248, 267, 349, 357, 368.

Bodovanie: Za ukázanie, že 12 je maximum + príklad – 5b, slabé vysvetlenie, neplatné všeobecne + príklad – 3,5b, niečo medzi – adekvátne viac, zlé riešenia podľa úrovne zdôvodnenia od 0 do 3,5 b. Pretvorenie zadania na svoj obraz som hodnotila podľa toho, či ešte bolo čo riešiť a či sa zadanie dalo pochopiť aj takýmto spôsobom od 1 do 4,5b.

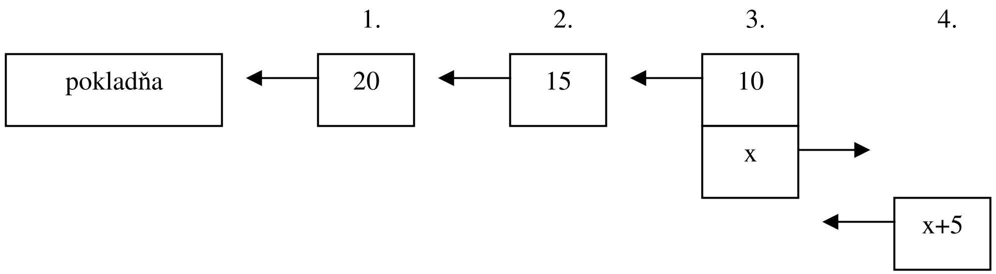
Príklad S2: Rozmieňacie čachre *opravoval Matej Bendži Bendžala*

Dvadsať ľudí si kúpilo lístky spolu za 100 libier. Každý mal po zaplatení a vyrovnaní medzi sebou o 5 libier menej ako predtým. Každý musel mať nejaké peniaze na kúpenie lístku, keďže nikto nemohol mať presne 5 libier, každému museli ostať nejaké mince i po zaplatení a vyrovnaní. Po zaplatení mali teda spolu najmenej 20 mincí, každý najmenej jednu a na zaplatenie 100 libier potrebovali najmenej 5 dvadsaťlibrových mincí, takže pred platením mali najmenej 25 mincí, teda piati po dve mince a zvyšní pätnásti po jednej. (Toto nemusí byť riešenie, pomôže to v riešení tak, že ak nájdem možnosť, že mali len 25 mincí, môžem si byť istý, že je to najmenšia možná možnosť a už nemusím hľadať ani možnosti s vyšším počtom mincí.)

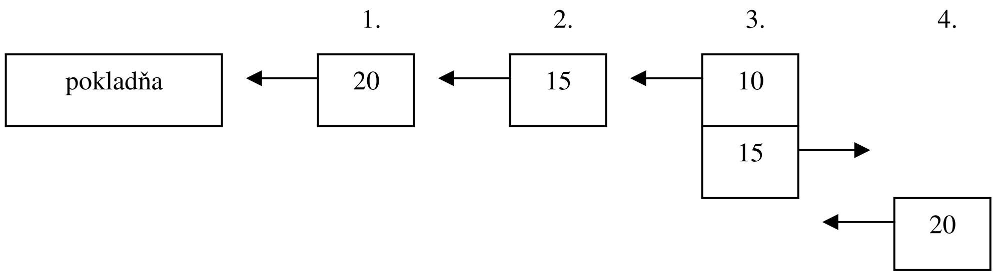
Aby mohli zaplatiť 100 libier najmenším počtom mincí, museli použiť 5 dvadsaťlibrových mincí. Ak by nebolo 100 libier zaplatených práve takto, musel by byť celkový počet mincí určite väčší ako 25, lebo do pokladne by išlo viac ako 5 mincí a muselo ešte ostať 20 mincí. Uvažujme teda 5 ľudí s 20 librami, tí musia dať mince do pokladne. Tí musia dostať späť 15 libier, tak nech ďalší piati cestujúci majú 15-librové mince, tí musia dostať späť 10 libier, tak nech ďalší piati majú 10-librové mince. Vyrovnať sa však s ľuďmi, ktorý dali niekomu len 10 libier nie je možné, lebo 5 librová minca neexistuje a zároveň niekto musí mať 10 librové mince na vyrovnanie s 15 librovými a tie na vyrovnanie s 20 librovými. Z toho vyplýva, že piati ľudia majúci 10 librové mince musia mať ešte ďalšiu mincu, ktorú tiež odovzdajú a potom sa bude možné s nimi vyrovnať. To sa nám hodí, lebo ešte ostali piati ľudia, ktorí nezaplatili, teda im dajú piati s 10 librovými mincami svoju druhú mincu a dostanú od nich o päť libier viac (možné kombinácie sú: 10-15 a 15-20).

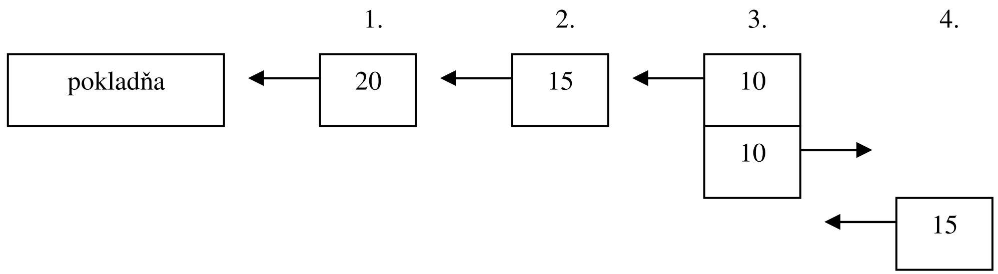
Je zrejmé, že existuje riešenie s použitím len 25 mincí, môžeme si byť teda istý, že je to minimálny počet mincí, aby sa to podarilo, lebo sme dokázali, že s menej ako 25 mincami to nie je možné. Riešenie však existuje viacej než jedno. 5 ľudí musí mať 20, a päť ľudí 15 librové mince, to je nemenné, ale zvyšní desiati, môžu mať rozdielne kombinácie mincí, spĺňať musia len tieto podmienky: piati musia mať 10-librovku a ešte nejakú mincu inú ako 20, a zvyšní piati takú mincu, aby sa s týmito piatimi mohli správne vyrovnať.

Päť krát teda prebehlo takéto platenie a vyrovnávanie medzi 4 ľuďmi:



Vidíme, že všetci môžu byť spokojný, majú o 5 libier menej ako na začiatku a použilo sa len 25 mincí. Za x môžeme dosadiť 10 alebo 15, 20 nie, lebo človek 4. by musel mať 25 libier a to s jednou mincou nie je možné. (Použité mince nemusia mať minimálnu hodnotu, dôležitý je len ich počet) Každá z piatich štvoríc mohla mať za x jednu z dvoch možností, riešení je teda 5 krát 2 = 10. Nebudem ich všetky vypisovať, vzniknú rôznymi kombináciami týchto dvoch možností pre 4 ľudí:





Ak uvažujeme aj postup ako si ľudia medzi sebou mince vymieňali, riešení je nekonečne veľa, pretože mohli vykonávať medzi sebou rôzne výmeny, ktoré nemajú žiadny význam pre vyrovnanie. Za rozdielne riešenia som preto pri hodnotení považoval len také, ktoré sa líšia počtom a druhom mincí u jednotlivých ľudí pred a po zaplatení .

Bodovanie: 1,5 bodu za dôkaz alebo odôvodnenie, že 25 je minimálny počet mincí, alebo za odôvodnenie toho, že ide o jedinú možnosť / možnosti pri daných podmienkach. 3,5 bodu za všetky možnosti priebehu platenia, nemusia byť vypísané, keďže ich je nekonečne veľa, stačí spomenúť princíp alebo dve najjednoduchšie možnosti platenia skupinky 4 ľudí. V prípade, že je spomenuté len niekoľko riešení zo všetkých, primeraný počet bodov, za iba jedno riešenie 1,5 bodu.

Príklad S3: ***Kamienkovú vojnu*** *opravoval Martin Malic Handlovič*

Zamerajme sa na jednotlivé rozostavenia kamienkov. Keďže stĺpce a riadky sú v podstate to isté, veď šachovnica sa dá otočiť, stačí ak sa zamyslíme, koľko kamienkov môže byť maximálne v riadku.

Ak by boli **4 kamienky**, tak potom vyberieme za prvý riadok tento riadok a za druhý ľubovoľný riadok jedného zo zvyšných kamienkov, no a posledný kamienok pokryje jeho stĺpec.

Ak by boli **3 kamienky**, tak potom sú dve možnosti, buď je v ostatných riadkoch po jednom kamienku, alebo sú dva v jednom a jeden v inom riadku, každopádne vyberieme riadok s tromi kamienkami a riadok s dvomi kamienkami, prípadne hociktorý s jedným kamienkom. No a ostatný jeden, resp. dva kamienky pokryjeme hravo ich stĺpcom, stĺpcami.

Ak by boli **2 kamienky**, tak sú ešte v dvoch riadkoch po dvoch, alebo v jednom dva a vo zvyšných dvoch po jednom. Tak či tak si vyberieme dva riadky s dvomi kamienkami a zvyšné dva kamienky pokryjeme ich stĺpcami.

Ak by bol **1 kamienok**, tak by ale nutne muselo byť v inom riadku viac kamienkov a túto možnosť sme už museli rozobrať vyššie.

Veľa z vás si na začiatku stanovilo, že najhoršie to bude mať ak budú prvé 4 kamienky každý v inom riadku a stĺpci, ale toto vám zobralo možnosť že sú 4 v riadku, nabudúce si na to dávajte pozor, nie všetko čo sa javí ako najhoršie, je aj skutočne najhoršie.

Bodovanie: Za správne riešenie 5 bodov, ak vám chýbala len možnosť 4, resp. 3 kamienky v riadku, tak do 3,5 bodu, ak ste uvažovali len o 2 v riadku tak do 1,5 bodu, za vyhlásenie, že to platí a ukážku jedného rozostavenia do 0,5 bodu.