PIKOMAT

Vzorové riešenia 3. série zimnej časti, kategória 7-9

Príklad S1: Rodokmeň. *Opravoval Juraj „Juro“ Pavlovič.*

Na tomto príklade bolo zaujímavé to, že aj keď na plný počet bodov stačilo trojriadkové riešenie, nebolo také jednoduché ho napísať úplne kompletne a jednoznačne. Poďme teda spočítať mužských potomkov bývalého majiteľa lebky.

Na začiatku mal 3 synov. Jediný spôsob, ako môžu do rodiny pribúdať potomkovia, je *narodenie*. Keby sme si rodokmeň kreslili (ako to väčšina z vás aj robila), začali by sme troma synmi majiteľa lebky a postupne by sme pridávali ďalšie dvojice synov. Zakaždým, keď niekam dokreslíme dvojicu synov, počet mužských potomkov sa zvýši o dva. Pritom je úplne jedno, do ktorej existujúcej generácie a komu presne týchto dvoch synov prikreslíme, *pri narodení dvoch synov sa počet mužských potomkov zákonite musí zvýšiť presne o dva*.

No a pri ešte jednom pohľade do zadania vidíme, že toto „dokreslenie“ dvoch synov do rodokmeňa môžeme spraviť presne 44-krát. Takže k pôvodným 3 synom presne 44-krát pribudnú 2 potomkovia, čo nás privádza ku konečnému počtu mužských potomkov 3+44×2 = **91**.

Ale pozor: prísť na toto číslo ešte nie je celé riešenie. Bolo veľmi dôležité v riešení aspoň spomenúť, že vôbec nezáleží na tom, ako konkrétny rodokmeň vyzeral (zaujímavé tiež je, že výsledok by sa nezmenil, ani keby sa v rodokmeni vyskytovali nejaké ženy), mužských potomkov bolo vždy 91.

Bodovanie:
správny výsledok so *všeobecným* odôvodnením – 5b.
nakreslené jeden či dva viac-menej náhodné rodokmene a spočítaní potomkovia – 3b.

Príklad S2: Platinové doštičky. *Opravoval Michal „Mišo“ Kováč.*

Na úlohy tohto typu je najlepšie ísť od konca – od najľahších prípadov k najťažším. V každej situácii si budeme všímať začínajúceho hráča, teda toho, kto je práve na ťahu.

Situácia 1
Ak je na stole len jedna kôpka, ***vyhrá začínajúci*** hneď prvým ťahom.
Situácia 2
Ak sú dve kôpky s rovnakým počtom doštičiek, ***začínajúci prehrá***. Vždy, keď zoberie niekoľko doštičiek z jednej kôpky, tak druhý zoberie rovnaký počet z druhej a znovu sú v tej istej situácii, len s menším počtom doštičiek. Toto sa bude opakovať, až druhý zoberie poslednú doštičku.
Situácia 3
Ak sú dve kôpky s rôznym počtom doštičiek, ***začínajúci vyhrá***, lebo zoberie doštičky z väčšej kôpky tak, aby na kôpkach ostal rovnaký počet a dostane protihráča do prehrávajúcej situácie 2.
Situácia 4
Ak sú tri kôpky s počtami doštičiek 1, 2, 3, ***začínajúci prehrá***. Ak zoberie ľubovoľnú celú kôpku, potom je to situácia 3 pre druhého. Ak zoberie čokoľvek iné (1 doštičku z 2., 1 doštičku z 3. alebo 2 doštičky z 3. kôpky), vždy vzniknú dve kôpky s rovnakým počtom doštičiek a jedna s iným. Tú jednu potom zoberie druhý hráč celú a ostanú dve s rovnakým počtom – začínajúci je v situácii 2 a prehrá.

Takže keď máme 4 kôpky, začínajúci Zoltán zoberie celú kôpku so 4 doštičkami, čím dostane Nitsuguu do prehrávajúcej situácie 4. *Túto hru vyhrá Zoltán.*

Časté chyby
Niektorí ste si v zadaní nevšimli, že hráči môžu zobrať aj viac ako jednu doštičku – vždy veľký pozor na presné znenie zadania! Takisto častá nesprávna úvaha bola, že po ťahu má ostať párny počet doštičiek. To neplatí napríklad pre 2 doštičky na jednej kôpke.

Bodovanie:
Strhával som body podľa kvality popisu. Dôležité bolo nájsť si systém, ktorým sa dali preveriť všetky možnosti, ako mohli hráči ťahať. Zabudnutie jednej či dvoch možností ešte nebolo až také zlé, ak v tom však niekto nemal systém, strhol som viac bodov.

Príklad S3: Skratka k ostrovu. *Opravoval Dominik „CD" Csiba.*

Kratšia vzdialenosť *vynásobená* jednociferným číslom dáva dlhšiu vzdialenosť. To znamená, že dlhšia vzdialenosť *vydelená* jednociferným číslom dáva kratšiu vzdialenosť.

Dlhšia vzdialenosť je šesťciferné číslo, ktoré má všetky cifry rovnaké, teda si ho viem zapísať ako $111111 \times a$, kde a je číslo od 1 po 9. Jednociferné číslo, ktorým delím, musí byť vždy väčšie ako a, inak by mi po vydelení ostalo číslo väčšie alebo rovnaké ako 111111, čo nie je päťciferné. Napríklad šesťciferné číslo zložené zo samých pätiek (čiže a=5) musím vydeliť niečím väčším ako 5.

Zároveň potrebujem po vydelení dostať celé číslo, lebo kratšia vzdialenosť je celočíselná. Keďže chcem dostať čo najväčšiu kratšiu vzdialenosť, tak potrebujem deliť čo najmenším číslom. Teda ak jednu z dlhších vzdialeností môžem deliť viacerými možnými číslami, tak ma zaujíma len to najmenšie z nich. Podobne, ak jedným číslom delím viaceré dlhšie vzdialenosti, zaujíma ma len tá najdlhšia z nich. Pomocou týchto kritérií vyškrtám všetky čísla, ktoré už neprichádzajú do úvahy a ostanú mi len tri možnosti:
222222 / 3 = 74074, 444444 / 6 = 74074, 666666 / 7 = 95238. Najväčšie z nich je 95238 a tým pádom je to aj správne riešenie. ***Kratšia vzdialenosť bola 95238 a dlhšia bola 666666.***

Bodovanie:
výsledky – 1b.
opis postupu, ako ste skúšali všetky možnosti – 4b.

Príklad S4: Mapa ostrova. *Opravovala Petra „Peťa" Vlachynská.*

Mnohí z vás našli správne riešenie, no neodôvodnili, prečo sa ostrov nedá rozdeliť na menší počet častí. Poďme sa na to teda pozrieť. Začneme tým, že vyrátame veľkosti častí ostrova, ktoré dostanú jednotliví kolonizátori pri deleniach medzi dvoch, troch a štyroch. Pri dvoch kolonizátoroch každý dostane 600km^2, pri troch 400km^2 a pri štyroch 300km^2.

Z toho vyplýva, že žiadna časť nemôže byť väčšia ako 300km^2, pretože by sa nedala použiť pri rozdeľovaní medzi 4 kolonizátorov (akonáhle by ju niekto dostal, už by mal väčšiu časť, než aká mu prináleží).

Teraz sa pozrime na rozdelenie ostrova 3 kolonizátorom. Každý má dostať 400km^2. No my už vieme, že najväčšia možná rozloha jednej časti je iba 300km^2, takže iba s jednou časťou sa nikto neuspokojí. Aby každý mohol mať 400km^2, musí mať každý aspoň 2 časti. Z toho je jasné, že ostrov musíme rozdeliť na ***najmenej 6 častí***.

Ak by ostrov mal 6 častí, s rozdelením medzi troch kolonizátorov by nebol problém. Každý by mohol dostať 2 časti, ktorých súčet je 400km^2. Teraz už treba iba nájsť také rozlohy častí ostrova, ktoré si môžu rozdeliť dvaja, traja aj štyria kolonizátori. To môže byť napríklad ***trikrát 300km^2 a trikrát 100km^2***. Takéto časti by si dvaja kolonizátori rozdelili na (300+300)km^2 a (300+100+100+100)km^2, traja na (300+100)km^2, (300+100)km^2 a (300+100)km^2, no a nakoniec štyria na (300)km^2, (300)km^2, (300)km^2 a (100+100+100)km^2.

Bodovanie:
výsledok (počet a veľkosti častí aj ich rozdelenie 2, 3 a 4 kolonizátorom) – 3b.
odôvodnenie, prečo častí nemôže byť menej ako 6 – 2b.

Príklad S5: Urna. *Opravovala Lucie „Klávesnica“ Křemenová.*

Vieme, že súčet mincí musí byť 175. Máme 6 druhov mincí: 1, 2, 5, 10, 20 a 50 Queliarov. Podmienky sú len 2: musíme použiť rovnaký počet z každého druhu a musí to byť spolu presne 175 Queliarov.

Takže začneme rozkladom na súčin prvočísel: 175 = 5×5×7. Naša výsledná suma je teda deliteľná číslami 5 a 7. Z toho vyplýva, že je deliteľná aj číslami 25 a 35 (keďže 175/5=35 a 175/7=25). Okrem toho všetci dobre vieme, že každé číslo je deliteľné 1 a samým sebou (v tomto prípade 175). Teda delitele čísla 175 sú: 1, 5, 7, 25, 35 a 175.

Ostáva nám len zistiť, ako tieto čísla môžeme poskladať (nezabúdame ale každý druh použiť v rovnakom množstve). Mince s číslami 1 a 5 máme, čiže máme prvé dve riešenia. 7 dosiahneme použitím mincí 2 a 5. 25 dostaneme použitím 20 a 5. 35 získame súčtom mincí 5, 10 a 20. Ostáva nám už len 175, ale keďže súčet všetkých druhov mincí je 88, pre toto číslo nie je riešenie.

Astronaut použil niekoľko druhov mincí (pozor: niekoľko neznamená, že viac ako jeden), pričom všetky nájdené možnosti sú použiteľné. Čiže máme 5 možných riešení:
1. astronaut zaplatí 175 kusmi 1-Queliarov.
2. astronaut zaplatí 35 kusmi 5-Queliarov.
3. astronaut zaplatí 25 kusmi 5 a 2-Queliarov.
4. astronaut zaplatí 7 kusmi 5 a 20-Queliarov.
5. astronaut zaplatí 5 kusmi 5, 10 a 20-Queliarov.

Bodovanie:
vynechanie možností s použitím iba jedného druhu mincí – mínus 1b. (ak ste sa o nich aspoň zmienili, nejaké tie štvrť bodíky som tam dala)
maximálne strhnutie za postup – mínus 3b.

Pikomat bol podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy č. LPP-0375-09.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára