PIKOMAT
Vzorové riešenia 2. série zimnej časti kategórie 7-9

Príklad 1: opravovala Miša Áčová

Začneme tým, že do tabuľky vpíšeme nejaký násobok 312. Môže to byť 312, 624 alebo 936, väčší násobok by sa nám už do tabuľky nezmestil.

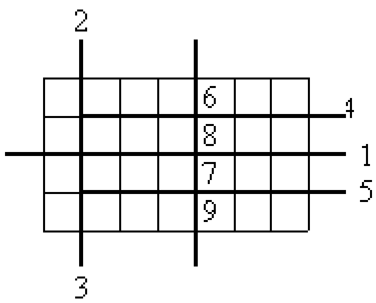
- Doplníme 312 do 1. stĺpca. V 1. riadku máme zatiaľ číslo 3, do 14 chýba ešte 11. To môžeme napísať ako súčet 2 čísel: 9+2, 8+3, 7+4, 6+5 (na poradí nám zatiaľ nezáleží a píšeme iba rôzne čísla < 10). Prvé dve možnosti môžeme hneď vylúčiť, lebo 2 a 3 už máme v tabuľke. V 2. riadku chýba do 15 ešte 14 (je tam 1) a to môže byť 9+5 alebo 8+6. Keďže v tomto riadku musíme použiť buď číslo 5 alebo 6, v 1. riadku nemôžeme použiť 5+6, takže tam zostalo 7+4. Do 2. riadku môžeme dať 9+5 (v 3. riadku bude 8+6) alebo 8+6 (v 3. bude 9+5). To sú zatiaľ 2 riešenia.
- Do 1. stĺpca doplníme 624. V prvom riadku chýba ešte 14-6=8. To je 7+1, 6+2 (vylúčime, 6 aj 2 tam už je), 5+3. V 2. riadku chýba ešte 15-2=13, to je 9+4 (4 už tam je), 8+5, 7+6 (6 tam už je). Takže v 2. riadku máme iba možnosť 8+5, tým pádom do 1. riadku nemôžeme dať 5+3, ale iba 7+1. V 3. riadku zostali čísla 9+3. To je 3. riešenie.
- Do 1. stĺpca dáme 936. V 1. riadku chýba ešte 14-9=5, to je 4+1, 2+3 (3 tam už je), takže do 1. riadku môžeme dať iba 1+4. V 2. riadku chýba ešte 15-3=12, to je 9+3 (obe tam už sú), 8+4 (4 ta, už je), 7+5 - toto tam musíme dať. V 3. riadku ostali 8+2. To je 4. riešenie.

Každé riešenie však má viacero kombinácií. Stĺpec s násobkom 312 môže byť na 3 miestach (3× viac riešení). Čísla v zvyšných 2 stĺpcoch môžeme vzájomne (v riadkoch) povymieňať, keďže sú 3 riadky po 2 čísla, je to 2×2×2 (8× viac riešení). Spolu je teda 4×3×8 = 96 riešení. Keďže sa v tabuľke nemôžu vyskytovať naraz 2 násobky 312, lebo majú všetky navzájom nejakú spoločnú cifru, žiadne riešenie sme nezarátali viac krát, teda je ich naozaj 96.

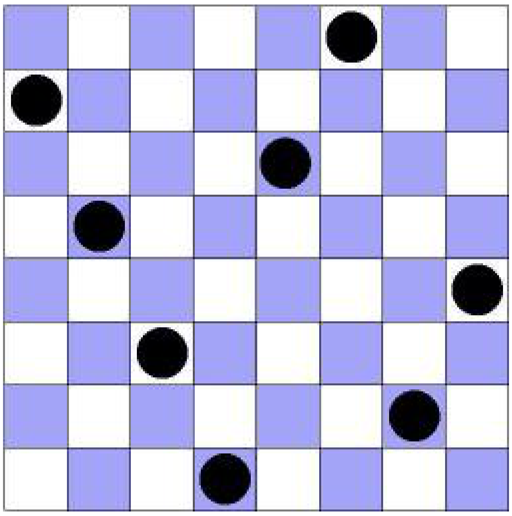
Bodovanie: Za nájdenie riešenia ste mohli dostať 1,5 bodu, za všetky kombinácie 1 bod, 0,2 bodu za neopakovanie stĺpcov a zvyšok za popis.

Príklad 2: opravoval Jerry Kadubec

Stratégia je taká hra hráča, že nech hrá súper ako chce, vždy prehrá. V tomto prípade, existuje stratégia pre 1. hráča. Je dobré začínať. Prvým ťahom rozlomím čokoládu na dve polovice. S využitím symetrie podľa tohoto rozlomenia "opakujem" ťahy profesora. Ak on nejako rozlomí jednu polovicu, ja rovnako rozlomím druhú polovicu. Teda ak on môže ešte lámať, tak môžem aj ja lámať. A preto profesor prehrá.



Príklad 3: opravoval Martin Hriňák



Keďže dámy sa nemôžu ohrozovať, v každom riadku bude maximálne jedna, teda spolu ich bude maximálne 8. No a 8 dám na šachovnicu vieme umiestniť.

Bodovanie: 5 bodov za správne riešenie, 3 body za nakreslenie vyhovujúceho postavenia, 1-2 body zdôvodnenie, že viac ako 8 to byť nemôže, 1,5 b za 7 dám + obrázok, 0,5 b za 6 dám + obrázok.

Príklad 4: opravovala Kami Vyslocká

Pravidelný štvorsten má 4 steny, ktoré majú tvar rovnostranného trojuholníka. Označme si súčet hrán štvorstena, ktoré tvoria jeho stenu X (sú to 3 hrany). X musí byť celé číslo (keďže je súčtom nejakých 3 celých čísel). Teda máme 4 steny a každá má súčet hrán rovný X. Preto ak umiestnime čísla 1,2,3,4,5 a 6 na hrany štvorstena (je ich 6), mali by sme číslo X získať 4 rôznymi súčtami 3 čísel (pre všetky 4 steny). Rozpíšeme si ale všetky možné súčty 3 čísel z {1,2,3,4,5,6}. Sú to: 6=1+2+3; 7=1+2+4; 8=1+2+5=1+3+4; 9=1+2+6=1+3+5=2+3+4; 10=1+3+6=1+4+5=2+3+5; 11=1+4+6=2+3+6=2+4+5; 12=1+5+6=2+4+6=3+4+5; 13=2+5+6=3+4+6; 14=3+5+6; 15=4+5+6.

Vidíme, že žiaden z možných súčtov 3 čísel z {1,2,3,4,5,6} nevieme dostať 4 rôznymi spôsobmi (pre 4 steny štvorstena) a teda nenájdeme X, ktoré by spĺňalo zadanie úlohy. Úloha nemá riešenie.

Bodovanie: Ak ste robili len dôkaz, že sa to nedá (t.j. nehľadali ste možnosťami X, ale podielom), tak za súčet rovný 2X boli 2 body dole, za neuvedenie, prečo musí byť X celé číslo a za nejasnosti v hodnotách (čo vyjadrujú) 0,5 bodu dole...

Príklad 5: opravoval Peťo Halák

Vzorové riešenie podľa Tomáša Dzurňáka.

Číslo domu si označíme x. Telefónne číslo môžeme zapísať v tvare 1000×a + 564 (takto dostaneme trojciferné číslo, končiace na 564). Pričom číslo a je ľubovoľné číslo (pre nás zatiaľ nepodstatné). Zo zadania vyplýva: (1000a + 564):x = 564. Túto rovnicu môžeme upraviť:

$$
\begin{aligned}
(1000\,a + 564):x &= 564 \quad /.x \\
1000a + 564 &= 564\,x \ /:564 \\
1000a / 564 + 1 &= x \\
250a / 141 + 1 &= x
\end{aligned}
$$

X má byť celé číslo (číslo domu) a celé môže byť iba vtedy, ak aj 250a/141 bude celé. Keďže 250 a 141 sú nesúdeliteľné, tak číslo a musí byť násobkom čísla 141. Potom pre a = 141 bude x = 251, a = 282 bude x = 501, a = 423 bude x = 751, a = 564 bude x > 1000, t.j. štvorciferné, čo nevyhovuje zadaniu. Ďalšie číslo domu, ktoré spĺňa podmienky zadania, už teda nemôže byť. Čísla všetkých domov na Číselnej ulici budú 251, 501, 751.

Riešenie mohlo byť aj iným postupom - časté boli úvahy o cifrách čísel domov, aby po ich násobení sme dostali v telefónnom čísle na konci číslo 564. Pri týchto riešeniach však bolo treba prejsť všetky možnosti, čo bolo dosť zdĺhavé.

Bodovanie: Za riešenie, z ktorého bolo jasné, že iné domy nemôžu existovať (t.j. vysvetlené, prečo pri tom-ktorom postupe nemôžu vzniknúť iné čísla domov) bolo 5 bodov. Za drobné nedostatky sa strhával max. 1 bod. Bez jasného postupu sa strhávali až 2 body. V prípade, že si na začiatku "zabudol" na časť možností, tak max. 3 body.

Príklad 6: opravovala Lenka Gažová

Z daných 4 častí štvoruholníka sa dá vytvoriť rovnobežník (viď obr. 2)

$V = V_1, V_2, V_3, V_4$

$X = A, B, C, D$

Treba dokázať:

1. Že $V_1V_2V_3V_4$ je 4-uholník
2. Že $V_1V_2V_3V_4$ je rovnobežník

vieme, že:

$a + b + g + d = 360°$ -súčet vnútorných uhlov 4-uholníka ABCD

$a' + b' + g' + d' = 360°$

$\alpha' = \gamma'$ - vrcholové uhly

$\beta' = \delta'$ - vrcholové uhly

$\angle AS_1V + \angle BS_1V = 180°$ - susedné uhly

$\angle BS_2V + \angle CS_2V = 180°$ - susedné uhly

$\angle CS_3V + \angle DS_3V = 180°$ - susedné uhly

$\angle DS_4V + \angle AS_4V = 180°$ - susedné uhly

1. $\angle V_1S_1V_4 = \angle V_1S_{2V2} = \angle V_2S_3V_3 = \angle V_3S_4V_4 = 180°$ - súčty susedných uhlov ⇒ že strany útvaru $V_1V_2V_3V_4$ sú priamky (resp. úsečky) a teda daný útvar je skutočne 4-uholník
2. Pre každý rovnobežník platí, že protiľahlé uhly a strany sú zhodné (stačí ukázať jedno z toho, ukážem dôkaz oboch vecí, aby ste vedeli ako sa to robí)
    a. zhodnosť protiľahlých uhlov vyplýva zo zhodnosti vrcholových uhlov pri vrchole V v 4-uholníku ABCD ($\alpha'=\gamma'$, $\beta'=\delta'$)
    b. zhodnosť protiľahlých strán
        - 4-uholník $S_1S_2S_3S_4$ je rovnobežník, pretože úsečka $S_1S_2 \parallel AC \parallel S_3S_4$ (S_1S_2 je strednou priečkou trojuholníka ABC, S_3S_4 strednou priečkou trojuholníka ACD) a úsečka $S_2S_3 \parallel BD \parallel S_1S_4$ (S_2S_3 je strednou priečkou trojuholníka BCD, S_1S_4 je strednou priečkou trojuholníka ABD)
        - S_1S_3, S_2S_4 úsečky sú uhlopriečky rovnobežníka, a teda sa rozpoľujú ⇒ $S_1V = VS_3$ a $VS_2 = VS_4$
        - $|V_1V_2| = |V_3V_4|$, $|V_2V_3| = |V_1V_4|$
        - a teda $V_1V_2V_3V_4$ je rovnobežník.