PIKOMAT, 16. ročník šk. rok 1998/99

Vzorové riešenia 1. série zimnej časti

Príklad 1:

Z odpovede prostredného trpaslíka je jasné, že nemôže byť Pravdík, pretože povedal, že v strede sedí Klamárik. Ani trpaslík sediaci vľavo nie je Pravdík, pretože tvrdí, že Pravdík sedí v strede. Z toho už vidíme, že Pravdík sedí vpravo. Keďže Pravdík vždy hovorí pravdu, vieme z jeho odpovede, že v strede sedí Akokedy. No a každý už iste uhádol, že vľavo sedí Klamárik.

Príklad 2:

Z kocky napravo poznáme polohu troch písmen: K, N a B. Z ostatných kociek vieme, že na nich sú ešte písmená L, E a A. Ale kde? Pozrime sa na B. Jedno z L, E, A je oproti nemu, z druhej a siedmej kocky vidíme, že L a A to nie sú. Takže oproti B je E. Takto však nemôžeme zistiť polohu L a A. Skúsime si teda pomôcť polohou písmen na stenách kociek. Ale zrada!!! Na kockách, ktoré sú rovnako otočené leží B raz na chrbte a raz na brušku. A L tiež štrajkuje. Nechajme teda tieto dve možnosti otvorené a pozrime sa, čo vznikne v oboch prípadoch rozloženia A a L:

1. B oproti E, N oproti L, K oproti A ...... ANABELKA
2. B oproti E, N oproti A, K oproti L ...... LKLBEANL

Čo myslíte, ktoré meno je správne meno pre princezničku?

Keď si všimneme 1. a 2. kocku, zistíme, že B je na nich otočené o 180°, a teda A a K by mali byť oproti sebe.

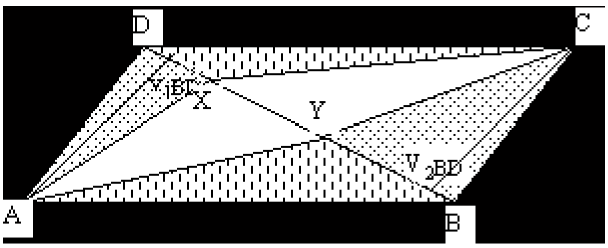
A nesmieme zabudnúť na to, že keď sa pozrieme na kocky zozadu, sú zoradené naopak (prvá je posledná).

Príklad 3:

Oba obsahy sú rovnaké. (Obrázok v zadaní je trošku zavádzajúci, nie je zrejmé, že poloha bodov X, Y na uhlopriečke je ľubovoľná.) A teraz dôvody rovnosti obsahov:

- Uhlopriečka BD delí rovnobežník ABCD na dva zhodné trojuholníky (z definície rovnobežníka a z toho, že uhlopriečka je pre oba trojuholníky spoločná môžeme použiť vetu sss)
- Tieto trojuholníky (ABD, CBD) majú spoločnú stranu a rovnaký obsah, a teda nutne aj rovnakú výšku na stranu DB (označme ju vDB), pretože $S_{ABD} = S_{CBD}$

$$|BD| \cdot v_1BD = |BD| \cdot v_2BD$$
$$v_1BD = v_2BD = vBD$$



Táto výška vBD (podľa potreby v_1BD alebo v_2BD) je rovnako výškou trojuholníkov AXB, BXC, ADY, CDY, pretože je kolmá na celú priamku BD. Teda platí:

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABX} = |BX| \cdot v_1BD = |BX| \cdot vBD \\ S_{BXC} = |BX| \cdot v_2BD = |BX| \cdot vBD \end{array}\right\} \; S_{ABX} = S_{BCX} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{ADY} = |DY| \cdot v_1BD = |DY| \cdot vBD \\ S_{CDY} = |DY| \cdot v_2BD = |DY| \cdot vBD \end{array}\right\} \; S_{CDY} = S_{ADY} \quad (2)$$

Sčítaním rovností (1) a (2) získam $S_{ABX} + S_{CDY} = S_{BCX} + S_{ADY}$. Bodka.

Príklad 4:

V tejto úlohe je kopa prienikov a zjednotení rôznych množín. A podstatou bolo sa z nej vymotať.

Zo zadania vieme, že voňalo 14 kvetov, z toho 11 bolo červených a 6 hovorilo. Tieto čevené a hovoriace budú mať nejaký prienik. Dokonca vieme aj aký. Posledná veta v zadaní hovorí, že z hovoriacich kvetov 4 voňali a boli červené (a to je to čo hľadáme len povedané trochu inač), takže z 11 voňavých červených kvetov sú 4 aj hovoriace a teda len 2 sú také, že voňajú, hovoria a nie sú červené. Teraz je úž ľahké spočítať, že len voňavých kvetov je 14 – 11 (červené voňavé) – 2 (nečervené hovoriace voňavé) = 1 (ak uvažujeme aj o modrých kvetoch, môže byť tento modrý, potom len voňavé kvety nie sú – lebo každý kvet má nejakú farbu).

Ako je to s len červenými? Pôjdeme na ne okľukou, cez hovoriace. Tých je 17. Z toho 3 len hovoriace, 4 červené voňavé hovoriace a 2 nečervené voňavé hovoriace. Ostatné musia byť červené hovoriace (nevoňavé) a je ich 17 – 3 – 4 – 2 = 8.

A teraz len červené: 24 (všetky červené) – 8 (červené hovoriace nevoňavé) – 11 (červené voňavé bez ohľadu na rečové schopnosti) = 24 – 19 = 5.

Takže len červených kvetov je 5, len voňavý je 1 (prípadne žiaden).

Príklad 5:

3a.a.a - rozmery truhličky
17 palcov – dĺžka prútika

Do truhličky tvaru kvádra máme uložiť rovný prútik tak, aby sa tam zmestil. “Najtesnejšie” sa tam zmestí tak, že bude ležať v telesovej uhlopriečke kvádra. Totiž, keď si vezmeme ľubovoľný kváder, tak dva najvzdialenejšie body z povrchu kvádra sú práve proti sebe ležiace vrcholy – krajné body telesovej uhlopriečky. Preto najmenšia truhlička, do ktorej sa prútik ešte zmestí má dĺžku telesovej uhlopriečky 17 palcov. Dĺžku telesovej uhlopriečky vieme vypočítať pomocou Pytagorovej vety:

Telesová uhlopriečka = $\sqrt{(3a)^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{9a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{11a^2} = a.\sqrt{11}$.

Z toho dostávame: $a.\sqrt{11} = 17$ palcov

$a = 17/\sqrt{11}$ palcov.

Príklad 6:

Hľadáme dvojciferné prvočísla, v ktorých keď vymeníme cifry, dostaneme tiež prvočísla. Je jasné, že tieto prvočísla nemôžu obsahovať žiadnu párnu cifru ani cifru päť, lebo potom by jedno z dvojice prvočísiel bolo deliteľné dvoma alebo piatimi. Ostávajú nám teda cifry 1, 3, 7 a 9, z ktorých môžeme poskladať prvočísla.

Obidve cifry musia byť navzájom rôzne, lebo inak by číslo bolo deliteľné jedenástimi. Výnimku tvorí číslo 11, ktoré je prvočíslom aj po výmene cifier. Tak isto nemôžu byť spolu cifry 3 a 9, lebo číslo by bolo deliteľné tromi. Ostávajú nám teda dvojice, ktoré si overíme:

- 13, 31 - sú prvočísla
- 17, 71 - sú prvočísla
- 19, 91 - 91 nie je prvočíslo, je deliteľné siedmimi
- 37, 73 - sú prvočísla
- 79, 97 - sú prvočísla
- 11 - je prvočíslo

Teda hľadaných čísel (hovoriacich stromov) je deväť.

Príklad 7:

Hľadáme najväčšie prirodzené číslo deliteľné 11, v ktorom sa každá z cifier 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vyskytuje práve raz. Úlohu vyriešime tak, že si napíšeme najväčšie číslo a postupne ho budeme zmenšovať a kontrolovať deliteľnosť 11. Tí, ktorí ste poznali kritérium deliteľnosti 11, ste to mali ľahšie, ostatní ste museli veľa deliť. Preto si teraz pozorne prečítajte kritérium deliteľnosti 11: Urobíme takýto zvláštny ciferný súčet: vezmeme si prvú cifru, od nej odpočítame druhú cifru, pripočítame tretiu cifru, odpočítame štvrtú cifru, atď. Ak je výsledok deliteľný 11, tak aj prirodzené číslo je deliteľné 11. Napríklad: 280 478 = 11 . 25 498

Kritérium deliteľnosti: 2 – 8 + 0 – 4 + 7 – 8 = -11 a to je deliteľné 11.

Keď už poznáme kritérium deliteľnosti, tak ho využijeme. Rozdelíme cifry na dve skupiny: prvá skupina bude na párnych, druhá na nepárnych pozíciách v čísle (prvú skupinu pričítame, druhú odčítame pri zisťovaní deliteľnosti). Najväčšie číslo vyzerá takto: prvá skupina – 9, 7, 5, 3, 1, druhá skupina – 8, 6, 4, 2, 0. Nás zaujíma rozdiel súčtov čísel v skupinách: súčet prvej skupiny je 25, druhej skupiny 20. Rozdiel je 5 a našou snahou je poprehadzovať čísla v skupinách tak, aby rozdiel bol deliteľný 11. Samozrejme, že prehadzovať chceme čo najmenšie čísla.

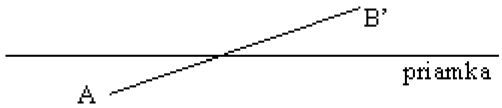
9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25
8 + 6 + 4 + 2 + 0 = 20

Všimnime si, že presunom ľubovoľného čísla sa rozdiel súčtov zmení o jeho dvojnásobok. Keďže rozdiel je na začiatku 5, najmenšia zmena k rozdielu deliteľnému 11 je zväčšenie o 6, teda výmena čísel s rozdielom 3. Pritom väčšie presúvame z druhej do prvej skupiny. Najmenšie takéto číslo je 4 a proti nemu 1. Po výmene dostaneme prvú skupinu ako 9 + 7 + 5 + 4 + 3 = 28 a druhú skupinu ako 8 + 6 + 2 + 1 + 0 = 17. Odčítame: 28 – 17 = 11, a teda hľadané číslo je 9876524130.

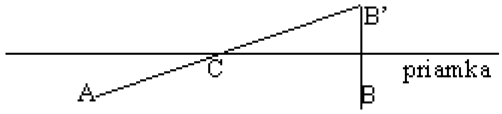
Príklad 8:

Lomená čiara ACB má byť čo najkratšia. Ako zistíme, kde má ležať bod C?

Predstavme si, že by body A, B ležali v opačných polrovinách určených priamkou, napríklad takto:



Vtedy najkratšia vzdialenosť je jasná, je to dĺžka úsečky AB a priesečník C je tiež hneď jasný. Ako by sa toto dalo využiť v našom príklade? Skúsime nájsť bod C tak, aby dĺžka lomenej čiary ACB bola rovnaká ako dĺžka úsečky, keby jeden bod ležal na druhej strane rieky. Inak povedané, jeden z bodov A, B (napr. B) si zobrazíme v osovej súmernosti podľa rieky (ktorá ako vieme má tvar priamky) do bodu B´.



Prienik úsečky AB´ s priamkou je hľadaný bod C. Môžeme si tým byť istí, lebo │BC│ = │B´C│ a │AB´│ je najkratšia možná.

Príklad 9:

Začnime tým, že si uvedieme nejaký jednoduchučký príklad, na ktorom si ilustrujeme princíp využitý v našom príklade. Vezmime si ilustračnú vetu: “Ak prší, tak na oblohe sú mraky.” Označme si písmenom A prvú časť vety a písmenom B druhú časť vety (za spojkou tak). A poďme určovať pravdivosť vety. Veta v uvedenom znení má zmysel, preto môžeme povedať, že ak A aj B sú pravdivé, aj celá veta je pravdivá. Ak časti A aj B budú nepravdivé, dostaneme vetu v znení: Ak neprší, tak na oblohe nie sú mraky. Aj táto veta má zmysel, teda ak A aj B sú nepravdivé, celá veta je pravdivá. Čo sa stane, ak A bude nepravdivé a B pravdivé? Veta bude znieť: Ak neprší, tak na oblohe sú mraky. To, či na oblohe sú mraky nám nezávisí od toho, či prší, veď mraky môžu byť a pršať nemusí a teda ak A je nepravdivé a B pravdivé, celá veta je pravdivá. Ostal nám ešte jeden prípad, a to ak A je pravdivé a B nie. Veta teraz vyzerá takto: Ak prší, tak na oblohe nie sú mraky. Kto z vás už videl pršať z jasného neba? Preto ak A je pravdivé a B nepravdivé, celá veta je nepravdivá.

Vezmime si teraz náš nápis a označme si ako A časť “tento strom je aspoň storočný”, ako B časť “riečka tečie z východu na západ” a ako C časť “zámok Bielej čarodejnice je na severe”. Vetu teraz prepíšeme do takéhoto zjednodušeného tvaru: Ak A, tak (ak B, tak C). A hor sa určovať pravdivosť vety. Keďže celá veta má byť nepravdivá, z ilustračného príkladu vieme, že sa tak stane, ak A bude pravda a to, čo je za prvou spojkou “tak” bude nepravda. Ale časť za prvou spojkou “tak” je tiež veta s podmienkou a bude nepravdivá len vtedy, ak B bude pravda a C nepravda. Teda nápis je nepravdivý len vtedy, keď A a B sú pravdivé a C je nepravdivé a teda strom je aspoň storočný, riečka tečie z východu na západ a zámok Bielej čarodejnice nie je na severe, ale na juhu.

Príklad 10:

Všimnime si rozdiely počtov bodiek v hornej a dolnej časti elfomina:

1. kocka 6/5: 6 – 5 = 1
2. kocka 5/3: 5 – 3 = 2
3. kocka 4/1: 4 – 1 = 3

1. kocka 6/2: 6 – 2 = 4, takže na piatej kocke by mal byť rozdiel 5: s takým rozdielom sú dve skladačky 6/1 a 5/0. A to sú aj riešenia tejto úlohy.

Príklad 11:

Poďme si porátať Diegove prstíky: keď začneme rátať od prvého prstu po šiesty a naspäť, tak na druhý prst vyjde číslo 10. Po druhom “kole” rátania (znova od prvého prsta po druhý cez všetky ostatné) vyjde na druhý prst číslo 20. Pri každom takomto “kole” Diego prejde cez 10 prstov, teda na druhý prste po “ceste späť” budú vždy vychádzať násobky 10. Najväčší násobok 10 menší ako 1998 je 1990, ktorý vyjde na druhý prst. Odtiaľ si už ľahko zrátame, že číslo 1998 vyjde na štvrtý prst.

Príklad 12:

Nech Ka = kameň, R = rybka, K = konárik a M = mušľa. Teraz si zapíšeme údaje do rovníc:

Ka = R + K (1)
R = K + M (2)
2Ka = 3M (3)

Ak (1) vynásobíme dvoma, dostaneme (4) 2Ka = 2R + 2K. Teraz (3) dosadíme do (4) a dostaneme ďalšiu rovnicu (5)

3M = 2R + 2K. Do (5) teraz dosadíme (2) a dostaneme (6) 3M = 2K + 2M + 2K = 4K + 2M. Jednoduchou úpravou zistíme, že M = 4K (7). Ak (ý) dosadíme do (2), uvidíme, že R = K + 4K = 5K. Päť konárikov váži toľko, ako jedna rybka.