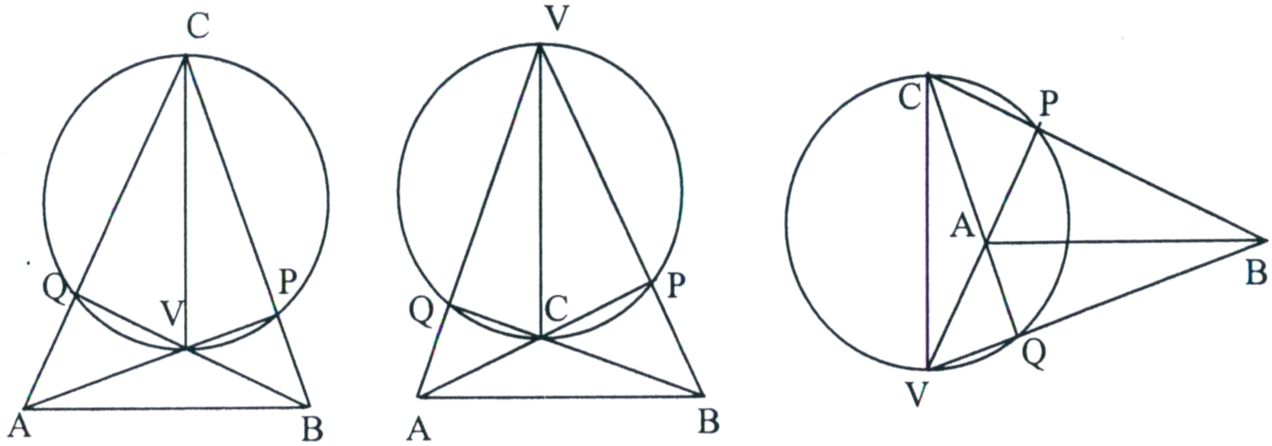
PIKOMAT, 15. ročník šk. rok 1997/98

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti

1. príklad (podľa K. Quittnerovej)

Pre pravouhlý trojuholník je toto tvrdenie zrejmé z toho, že bod V musí byť zároveň aj aspoň jedným z bodov P,Q. Na obrázkoch sú všetky ostatné prípady (ΔABC je ostrouhlý; ΔABC je tupouhlý s tupým uhlom pri vrchole C; ΔABC je tupouhlý s tupým uhlom pri vrchole A alebo B).



Vo všetkých troch prípadoch sú trojuholníky CVP a CVQ pravouhlé s preponou CV, takže podľa Thalesovej vety musia ležať všetky štyri body C, V, P, Q na jednej kružnici (s priemerom CV).

2. príklad

Pri hľadaní čísel s požadovanými vlastnosťami najskôr zistíme, z akých cifier sa môžu skladať. Nemôžu to byť cifry:

2, 4, 6, 8 - lebo číslo končí 9-imi, čiže je nepárne, takže nemôže byť deliteľné žiadnym párnym číslom

5 - lebo číslo nekončí na 0 alebo 5

0 - lebo 0 nedelí žiadne číslo

Zostali nám teda čísla 1, 3, 7, 9. Dalej vieme, že aby bolo číslo deliteľné 9-imi, musí byť aj jeho ciferný súčet deliteľný 9-imi. Túto podmienku splňajú tieto čísla: 1179, 11719, 7119, 3339 a 9999. Nakoniec ešte overíme poslednú podmienku, teda deliteľnosť ostatnými ciframi. Vypadnú nám čísla 1179 a 1719, lebo nie sú deliteľné 7-imi. Takže sme dostali čísla 7119, 3339 a 9999.

3. príklad

Hľadané číslo č musí byť deliteľné 49, teda 7^2 a končiť 5-kou, teda musí byť deliteľné 5. Môžeme ho teda napísať ako č $= 7^2 . 5 . x$

Aby mali číslo č nepárny počet deliteľov, musí byť druhou mocninou. Každý deliteľ d_1 má totiž svoj pár d_2 taký, že $d_1 . d_2 =$ č, d_2 je tiež deliteľom č. Pár nemá jedine vtedy ak $d_1 = d_2$, teda č $= d_1 . d_1 = d_1^2$.

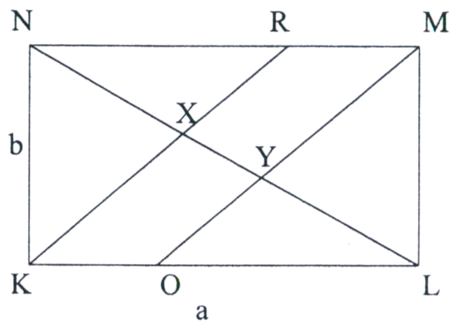
Naše číslo má 11 deliteľov, takže musí byť druhou mocninou. Keďže je deliteľné 5, musí byť deliteľné aj 25, teda sa dá zapísať ako č $= 5^2 . 7^2 . y$. Určite má týchto 9 deliteľov: 1, 5, 7, 5.5, 5.7, 7.7, $5^2.7$, 5.7^2, $5^2.7^2$. Musí mať ešte dvoch iných deliteľov. Buď je teda deliteľné iným prvočíslom p, rôznym od 5 a 7, alebo je deliteľné 5^3 alebo 7^3. Ak je deliteľné iným prvočíslom p, potom má ešte 9 ďalších deliteľov: 1.p, 5.p, 7.p, 5.5.p, 5.7.p, 7.7.p, $5^2.7.p$, $5.7^2.p$, $5^2.7^2.p$, čo je spolu 18 deliteľov a to je priveľa, teda číslo č nie je deliteľné iným prvočíslom ako 5 a 7.

Podobne sa môžete presvdčiť, že čísla $5^3 . 7^2 . y$ a $5^2 . 7^3 . z$. Teda úloha nemá riešenie.

Poznámka k riešeniam: Nezabúdajte, že každé číslo má aj deliteľov 1 a samé seba!

4. príklad

Najprv potrebujem zistiť, ktorá zo šiestich plôch je najmenšia (vlastne len z troch, pretože obsahy dvojíc trojuholníkov a rovnobežníkov sú vďaka "súhlasným a striedavým uhlom na rovnobežkách" rovnaké). Strany obdĺžnika si označím a,b a priesečníky LN s KR, MO si označím X,Y(viď **OBRÁZOK**).



Obsah celého obdĺžnika KLMN je teda **S = a . b** .

$S_{KORM} = S_{KLMN}$ - 2. S_{OLM} = a.b - 2. (a. 2/3b)/2 = 1/3 a.b = 1/3 S. Čiže S_{KORM} = 1/3 S.

Keďže S_{XYRM} = 1/2 S_{KORM}, tak S_{XYRM} = 1/2. 1/3 S = 1/6 S. **S_{XYRM} = 1/6 S**.

Ešte potrebujem určiť obsah trojuholníka NXR. O tom viem, že je podobný s trojuholníkom NYM (veta uu) v pomere 2:3. To znamená, že pomer ich obsahov je $(2:3)^2$ = 4:9, teda S_{NXR} = 4/9 S_{NYM} => *S_{NYM} = 9/4 S_{NXR}*

Ďalej vidím, že *S_{NYM} = S_{NXR} + S_{XYRM}* = S_{NXR} + 1/6 S.

Riešením sústavy získam: 9/4 S_{NXR} = S_{NXR} + 1/6 S

5/4 S_{NXR} = 1/6 S

S_{NXR} = 2/15 S

Nakoniec potrebujem zistiť obsah trojuholníka YLM. Vidím, že S_{NML} = S_{NXR} + S_{XYRM} + S_{YLM}, čiže *S_{YLM} = S_{NML} - S_{NXR} - S_{XYRM}*, čo znamená **S_{YLM}** = 1/2S - 2/15S -1/6S = **6/30 S**

Teraz už stačí len porovnať obsahy troch "adeptov", ktorí majú "byť čo najmenší".

Výsledok je takýto: **S_{NXR} < S_{XYRM} < S_{YLM}**, pretože **4/30 S < 5/30 S < 6/30 S**

Teda Ceruzka sa po vyfarbení trojuholníka NXR (alebo OYL) skrátila o 8 pukimukov. Pritom vyfarbila 4/30 S obdĺžnika KLMN, má teda ešte vyfarbiť 26/30 S obdĺžnika. Keďže pri zafarbení 4/30 S obdĺžnika KLMN sa skrátila o 8 pukimukov, tak pri zafarbení 1/30 S obdĺžnika KLMN sa skráti o 2 pukimuky. Pri zafarbení zvyšných 26/30 S obdĺžnika KLMN sa skráti ešte o 2.26 = 52 pukimukov.

Mnohí z Vás sa pokúšali zistiť obsah jednotlivých častí obdĺžnika ručným meraním ich strán a výšok. To je síce dobrá pomôcka, ale nie úplne spoľahlivá, ľahko sa môžete dopustiť nepresností, čo platí v jednom konkrétnom obrázku, nemusí platiť vo všeobecnosti). Uvediem na to aspoň dva dobré dôvody:

1. zo života: Ak sedíte v divadle a postavíte sa, lepšie uvidíte na pódium. Ak sa však postavia v divadle všetci (teda aj tí v rade pred vami), uvidia všetci lepšie?
2. z matematiky: v rovnoramennom trojuholníku výška pretína stred príslušnej strany. Neplatí to však v každom trojuholníku !

5. príklad

Vzdialenosť medzi konečnými zastávkami je 45 ťp (ťukipukov). Električka čaká na prvej konečnej 5 ťp, potom 45ťp ide na druhú konečnú, 5ťp čaká a 45 ťp ide naspäť na prvú. Teda celá okružná trasa trvá 5 + 45 + 5 + 45 = 100 ťp.

Včera chodilo na trase x súprav, preto intervaly medzi električkami boli dĺžky

i = 100 / x ťp

Dnes pridali 5 súprav, teda na trase premáva x + 5 súprav a interval je o 1ťp kratší, teda trvá i - 1 ťp. Zároveň vieme, že platí

i - 1 = 100 / (x + 5) ťp

Po úprave máme dve rovnice:
100 = **i . x**
100 = (i - 1)(x + 5) = **i . x** - x + 5i - 5 = 100 - x + 5i - 5

100 = i . x
0 = -x + 5i - 5

100 = i . x

x = 5i - 5, teda 100 = i (5i - 5) = 5i (i-1), teda 20 = i (i - 1)

Zrejme 20 = 5 . 4, teda i = 5.

Včera bol interval medzi električkami i= 5 ťp a chodilo 100 / i = 100 / 5 = 20 súprav. Dnes je interval i - 1 = 4 ťp a chodí 20 + 5 = 25 súprav.

6. príklad

Z vašich riešení som povyberal, tak aby boli zastúpené všetky nápady:

Mal by dupnúť na plyn a vynechať polovicu zastáviek!

1. Do autobusu sa namontuje dvakrát výkonnejší motor na kvalitnejšie palivo
2. Autobus celú trasu prejde dvoojnásobnou rýclhosťou
3. Autobus sa nezastaví na všetkých zastávkach

Treba vynechať niektoré zastávky alebo pridať ešte jeden autobus.

Môže o polovicu zvýšiť rýchlosť a o polovicu skrátiť prestávky, alebo vynechať prestávky, pri najhoršom môže zvýšiť rýchlosť a vynechať prestávky.

Buď aby autobus stál kratší čas na zastávkach, alebo aby chodil rýchlejšie. Alebo nech dajú na linku ešte jeden autobus a tým sa zníži počet ľudí v autobuse aj čas ich nastupovania a tým aj časový interval cesty.

Najlepšie riešenie by bolo
a) vodič autobusu by vynechal všetky zastávky a išiel by priamo z konečnej na konečnú
b) vodič autobusu by zvýšil rýchlosť autobusu
c) najlepšie by bolo, keby vodič (aj ostatní) vyhlásil štrajk, čím by si skrátil čas nielen na polovicu, ale by mu to netrvalo vôbec nič. Toto riešenie je najpríjemnejšie pre vodiča a nezaoberám sa v tomto riešení ďalším vzniknutým problémom - čo by robili cestujúci.

Musí zrýchliť alebo ísť skratkou.

Dosiahol by to tak, že by išli dva a jeden by stál na každej párnej a druhý na každej nepárnej zastávke.

Buď si bus skráti trasu alebo pridá.

Autobus 34 ? 75 min.
17 ? 37,5 min.

10 návodov, ako skrátiť čas autobusu 34 na polovicu:
1.) Vynechať každú druhú zastávku.
2.) Ignorovať červenú a dopravné predpisy.
3.) Poprosiť Schumachera, aby robil šoféra na tejto trase.
4.) Dať opraviť cesty.
5.) 34 autobus nahradiť 34 metrom (poprípade taxíkom)
6.) Namontovať autobusu krídla.
7.) Jazdiť iba v noci.
8.) Namontovať autobusu modrý maják a húkačku.
9.) Použiť v autobuse motory na impulzný pohon. (Star trek)
10.) Nahradiť 34-ku 86-kou. (Možnosť prebratá od DPMB)

Ja len dodám, že vzorovým riešením je riešenie Dopravného Podniku Mesta Bratislavy z 1.7.1997 - skrátenie trasy na polovicu. (Časť druhej polovice trasy nahrádza spomenutá 86-ka.)