Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

30. ročník www.pikomat.sk školský rok 2012/2013

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti, kategória 7–9

Úloha S1: Indiánske schopnosti. *Opravovala Kristína „Krisa“ Faguľová.*

Pozrime sa najskôr, čo vieme zistiť zo zadania. Keďže schopností bolo 6, ale varenie si nikto nevybral, každý Indián sa mohol priučiť maximálne piatim schopnostiam. Zadanie vraví, že iba polovica Indiánov (15) sa priučila **aspoň trom** schopnostiam. Takže títo 15-ti usilovnejší sa mohli priučiť **3, 4 alebo 5** schopnostiam, zvyšní 15-ti lenivší (druhá polovica) sa museli priučiť **menej ako trom** schopnostiam, teda **2, 1 alebo žiadnej**. Ďalej sa zo zadania dozvedáme, že tretina Indiánov (10) sa rozhodla priučiť viac ako trom schopnostiam. To znamená, že tú prvú usilovnejšiu polovicu (15 Indiánov) treba rozdeliť na dve časti – 10 takých, ktorí sa chcú priučiť **viac ako trom** schopnostiam, no a zvyšných 5 musí byť takých, ktorí sa chcú priučiť **presne trom** schopnostiam. Celkové rozdelenie, koľko Indiánov sa mohlo naučiť koľko schopností, vidíme zhrnuté v tabuľke.

Indiánov	Schopností
15	0, 1 alebo 2
5	presne 3
10	4 alebo 5

Našou úlohou je dokázať, že aspoň jednej z piatich schopností sa priučilo menej ako 20 Indiánov. Najprv sa pozrime, ako by to vyzeralo, keby to nebola pravda. Čiže keby sme nenašli žiadnu takú schopnosť, ktorej sa priučilo menej ako 20 Indiánov. To by teda znamenalo, že každej schopnosti sa priučilo aspoň 20 Indiánov. Celá skupina Indiánov by teda dohromady nadobudla aspoň $5 \cdot 20 =$ **100 schopností**. Mohol však takýto prípad naozaj nastať?

Keď sa vrátime k našej tabuľke, vidíme, že najviac schopností z nej dostaneme vtedy, ak sa každý Indián naučí najvyšší počet schopností, aký mu tabuľka dovoľuje. Spolu to teda bude $15 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 5 =$ **95 schopností**. Toto je NAJVIAC schopností, koľko sa mohli Indiáni dokopy naučiť. Keďže ale $95 < 100$, tak spomínaný prípad, v ktorom by sa každej schopnosti priučilo aspoň 20 Indiánov, nemohol nastať. No a z toho už jasne vyplýva, že **aspoň jednej schopnosti sa priučilo menej ako 20 Indiánov**.

Bodovanie:
zistenie, koľko presne schopností sa koľko Indiánov mohlo naučiť – 2b.; dôkaz o maximálnom počte naučených schopností – 2b.; zvyšný 1b. za zdôvodnenie.

Úloha S2: Jimova úloha. *Opravovala Ľudmila „Ľudka“ Šimková.*

Keď nevieme, ako začať, najlepšie je prosto niečo vyskúšať – čokoľvek. Možno sa nám pošťastí a naďabíme rovno na riešenie, ale ak aj nie, snáď si aspoň čosi zaujímavého všimneme, čo nám neskôr pomôže. Skúsime teda párkrát náhodne vyplniť tabuľku 5×5 číslami -1, 0 a 1 a vždy spočítame súčet v každom riadku, stĺpci, aj na oboch uhlopriečkach. No dostať všetky tieto súčty rôzne sa nám stále akosi nedarí...

Preskúmajme teda presnejšie tie súčty, ktoré sa nám v riadkoch, stĺpcoch a uhlopriečkach objavujú. Aké rôzne súčty vlastne môžu vzniknúť? Najvyšší súčet, ktorý sa nám mohol objaviť, je 5 – a to vtedy, ak sme sčitovali samé jednotky. Jednoducho preto, lebo každý riadok, stĺpec aj diagonála má presne 5 okienok. Takže ak do nich aj vpíšeme najväčšie povolené číslo – jednotku – **väčší súčet ako 5 nikdy nedosiahneme**. Presne to isté samozrejme platí aj o najmenšom súčte: najmenšie povolené číslo je -1, preto **menší súčet ako -5 tiež nikdy nedosiahneme**.

Už teda vieme, že všetky súčty istotne budú v rozmedzí od -5 do 5, čiže to môžu byť iba tieto: -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 a 5. Môžeme teda dosiahnuť najviac **11 rôznych súčtov**. Tabuľka však má päť stĺpcov, päť riadkov a dve uhlopriečky – **spolu 12** – a Jim v každom vyžaduje rôzny súčet. Keďže rôznych súčtov máme iba 11 možných, už je jasné, že nám ani kovbojom sa vyplniť tabuľku podľa Jimových inštrukcií **nepodarí** nikdy.

Bodovanie:
ukázanie, že je možných len 11 rôznych súčtov a ktoré to sú – 2,5b.; ukázanie, že potrebujeme 12 rôznych súčtov – 1,5b.; zvyšný 1b. za správnu odpoveď; body som strhávala hlavne za nesprávne pochopenie zadania alebo ak vám chýbali niektoré súčty, ktoré vieme dostať.

Poznámka:
Niektorí z vás sa pomýlili a mysleli si, že sa nesmú opakovať čísla v jednom riadku, stĺpci či diagonále. Takto sa tabuľka samozrejme vyplniť nedá, lebo čísla máme iba 3 a políčok v jednom smere je 5. Jim však prikázal, že rôzne musia byť iba súčty (samotné čísla sa mohli opakovať akokoľvek). Takisto odôvodnenie, že tabuľka sa vyplniť nedá, lebo ste to niekoľkokrát skúsili a ani raz to nevyšlo, nie je dostatočné, pokiaľ nevyskúšate úplne všetky možnosti (len pre zaujímavosť: všetkých možností, ako vyplniť tabuľku, je 847 288 609 443 – vedel(a) by si povedať, ako sme na to prišli?).

Úloha S3: Násobenie. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

Indiánske násobenie má dve časti – najprv sa násobí a delí dvomi, a potom sa niektoré riadky vyškrtajú a zvyšné spočítajú. Tak sa pozrime, čo sa v oboch častiach deje a prečo to funguje.

Najprv číslo v ľavom stĺpci vydelíme dvoma a to v pravom vynásobíme dvoma. Ak bolo to ľavé párne, tak je to jasné – keď jedno číslo vydelíme dvoma a druhé vynásobíme dvoma, tak sa ich súčin nezmení: $(a \div 2) \cdot (b \cdot 2) = a \cdot b$. Keby sme napríklad násobili 32·7 (ako v tabuľke), tak by sme vľavo dostávali samé párne čísla a súčin dvojice čísel v riadku by sa nemenil. Potom by sa vyškrtli všetky riadky okrem posledného, a tam by sme mali rovno výsledok, v tomto prípade 224.

~~32~~	~~7~~	32·7=224
~~16~~	~~14~~	16·14=224
~~8~~	~~28~~	8·28=224
4	~~56~~	4·56=224
~~2~~	~~112~~	2·112=224
1	**224**	1·224=224

Niektorí z vás si správne všimli, že všetky riadky okrem posledného sa nám vyškrtajú (teda vľavo budú samé párne čísla okrem 1 na konci) vždy vtedy, keď je ľavý činiteľ číslo, ktoré vzniklo vynásobením niekoľkých dvojok a ničoho iného – takzvaná mocnina dvojky (napr. v tomto prípade 32 = 2·2·2·2·2).

Čo však, keď na začiatku alebo v priebehu počítania dostaneme nepárne číslo v ľavom stĺpci? Prečo vtedy ten riadok nevyškrtneme, ale jeho pravé číslo pripočítame do výsledku?

9	6
~~4~~	~~12~~
~~2~~	~~24~~
1	48
	54

~~8~~	~~6~~
~~4~~	~~12~~
~~2~~	~~24~~
1	48
	48

Pozrime sa, ako by sa násobilo napr. 9·6 a porovnajme si to s násobením 8·6. Pri 8·6 nám v poslednom riadku vyjde rovno výsledok 48, pretože 8 je mocninou dvojky (8 = 2·2·2) a teda všetky riadky sa vyškrtajú. Rozdiel medzi 9·6 a 8·6 je práve jedna šestka – v jednom prípade sčítavame 9 šestiek, v druhom prípade 8 šestiek. To, že 9÷2 nám vyjde 4,5, čo potom zaokrúhlime na 4, je vlastne rovnaké, ako keby sme najprv od čísla 9 odpočítali 1, a potom delili 8÷2. Keďže sme v súčine 9·6 deviatku zmenšili o 1, celý súčin sa nám zmenšil o 6. To si ľahko overíme aj v tabuľke: v prvom riadku je 9·6 = 54, pod tým je 4·12 = 48, teda presne o 6 menej. Takže vždy keď v ľavom stĺpci vydelíme nepárne číslo dvoma a výsledok zaokrúhlime, celý súčin sa nám zmenší o toľko, aké číslo bolo v pravom stĺpci. Tieto straty treba ale napraviť, a práve preto na konci všetky pravé čísla v týchto riadkoch spočítame – a preto práve tieto riadky nevyškrtávame.

Teda všeobecne – ak máme v niektorom riadku *a·b* a *a* je párne, tak krok $\frac{a}{2} \cdot 2b = a \cdot b$ nám výsledok nezmení, netreba nič naprávať, a preto tento riadok môžeme škrtnúť. Ak máme v niektorom riadku *a·b* a *a* je nepárne, tak na ďalšom riadku sa nám súčin zmení: $\frac{a-1}{2} \cdot 2b = (a \cdot b) - b$. Súčin sa nám zmenšil o *b,* preto musíme na konci *b* do výsledku opäť vrátiť (pripočítať), a tak tento riadok neškrtneme.

	zv.		
13	1	Jednotky	1·28=28
~~6~~	~~0~~	~~Dvojky~~	~~2·28=56~~
3	1	Štvorky	4·28=112
1	1	Osmičky	8·28=224
		13=1+4+8	13·28= (1+4+8)·28= 364

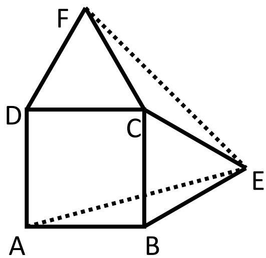
Ukážeme si ešte jednu zaujímavú vec, ktorú niektorí z vás použili. V pravom stĺpci dostávame postupne dvoj-, štvor-, osem-, šestnásť-, ... násobky pôvodného pravého činiteľa. Keď chceme dostať *a*-násobok pravého činiteľa (pritom *a* je vlastne ľavý činiteľ), tak musíme nájsť také čísla z množiny {1, 2, 4, 8, 16, ...}, ktorých súčet je *a*. Teda napríklad v prípade zo zadania 13-násobok čísla 28 dostaneme vtedy, keď sčítame ***1***·*28* + ***4***·*28* + ***8***·*28* = ***13***·*28*. To, ktoré takéto násobky treba použiť, zistíme práve pri tom delení dvomi. Pozrime sa, ako delíme číslo 13, ktoré je v zadaní; rovnako to bude fungovať pre všetky ostatné.

13÷2 = 6, zv. 1. To znamená, že trinástku vieme rozdeliť na šesť dvojek a ostane nám jedna jednotka. Ďalej týchto šesť dvojek vieme rozdeliť na tri štvorky bezo zvyšku: *6÷2 = 3, zv. 0*. Takže dvojku nepotrebujeme. Ďalej skúsime, či sa z tých štvoriek dajú spraviť celé osmičky: *3÷2 = 1, zv. 1* – jedna štvorka nám ostala. A nakoniec máme už len jednu osmičku, z tej už žiadnu šestnástku ani iný vyšší násobok nespravíme:

1÷2 = 0, zv. 1. Keď si prečítame zvyšky odzadu, teda 1101, dostali sme zápis čísla 13 v dvojkovej sústave. Ale toto sme od vás v riešení nevyžadovali. ☺

Bodovanie:
V princípe bolo treba vysvetliť, čo sa deje pri delení/násobení jednej/druhej strany dvojkou (2 body) a prečo treba škrtnúť tie riadky, kde je vľavo párne číslo a zrátať pravé čísla v tých zvyšných (3 body).

Úloha S4: Táborisko banditov. *Opravovala Lenka „Lenika“ Bendová.*



Aj keď túto úlohu bolo možné riešiť niekoľkými spôsobmi, budeme sa venovať tomu, na ktorý sa zamerala väčšina riešiteľov. Zo zadania vieme, že trojuholníky DCF a BCE sú rovnostranné. Z toho je tiež jasné, že ich strany sú rovnako dlhé ako strany štvorca ABCD.

Z toho vyplýva, že nám vzniknú dva rovnoramenné trojuholníky ABE a ECF s rovnakými dĺžkami ramien – v jednom sú to strany AB a BE, v druhom strany EC a CF – všetky 4 sú rovnako dlhé. Keď sa im lepšie prizrieme, zistíme, že dokonca aj uhly medzi týmito stranami sú rovnaké:

$$|\angle ABE| = |\angle ABC| + |\angle CBE| = 90° + 60° = 150°,$$

$$|\angle ECF| = 360° - |\angle ECB| - |\angle BCD| - |\angle DCF| = 360° - 60° - 90° - 60° = 150°.$$

Tým pádom už aj z obrázku vidno (a niektorí to možno tiež poznáte ako pravidlo strana-uhol-strana alebo SUS), že trojuholníky ABE a ECF sú zhodné. To znamená, že aj ich základne AE a EF sú rovnako dlhé. Keďže dĺžku AE poznáme zo zadania – 1000m – zistili sme aj dĺžku **EF**: tiež **1000m**.

Bodovanie:
body som strhávala za nevysvetlené alebo nesprávne logické skoky v postupe.

Úloha S5: Jedlo. *Opravoval Milan „Jimi“ Smolík.*

Najprv si treba uvedomiť, že nikde v zadaní nie je napísané, že čísla *a*, *b*, *c* musia byť rôzne. Tiež si treba uvedomiť, že na úplné vyriešenie úlohy nestačí nájsť všetky riešenia, ale treba aj dokázať, že ich viac nie je. Aj na to mnohí z vás zabudli.

Kúsky rozlámaných pemikamov budeme označovať zlomkami $1/a$, $1/b$ a $1/c$, pretože keď sa 1 celý pemikam rozlomí na *a* rovnako veľkých častí, tak každá časť má veľkosť presne $1/a$. My musíme z troch takýchto kúskov znovu poskladať jeden celý pemikam, takže musí platiť:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$$

Najväčší prípustný kúsok je 1/2. Ďalší väčší by už musel byť 1/1 = 1, čiže jeden celý pemikam, čo je zjavne nezmysel (lebo po pridaní zvyšných dvoch kúskov by sme už mali priveľa). Teraz si poďme premyslieť, aký je najmenší prípustný kúsok. Totiž aj ten najmenší kúsok musí byť aspoň taký veľký, aby sa dal zvyšnými dvoma doplniť na jeden celý pemikam. Dva najväčšie kúsky sú 1/2 a 1/3 (pretože ďalšia väčšia možnosť je už 1/2 + 1/2, čo je opäť priveľa). Spolu tvoria 5/6 pemikamu, a teda na jeho doplnenie treba ešte 1/6. Takže **najmenší prípustný kúsok je 1/6.** Zároveň sme tým našli prvé riešenie: ***a* = 2, *b* = 3, *c* = 6** (alebo v inom poradí, to už je jedno).

Držme sa ešte toho najväčšieho kúsku: 1/2. Druhý pemikam sa totiž nemusel rozpadnúť na tretiny, mohol aj na menšie časti. Ak by sa rozpadol na 4 kúsky veľké 1/4, do celého pemikamu by chýbala ešte 1/4. Na takéto kúsky sa mohol rozpadnúť tretí pemikam, takže sme našli druhé riešenie: ***a* = 2, *b* = 4, *c* = 4**.

Pokračujeme v skúmaní prípadov, kedy sa prvý pemikam rozpadol na polovice. Ak by sa druhý pemikam rozpadol na 5 kúskov, spolu by sme mali 1/2+1/5 = 7/10 a do celého pemikamu by zostávali 3/10. Takýto kúsok z tretieho pemikamu vzniknúť nemohol, smola. Ak by sa druhý pemikam rozpadol na 1/6, dostaneme už staré známe (prvé nájdené) riešenie a=2, b=6, c=3, takže tiež nič nového. Iný rozpad druhého kúsku už nemá zmysel skúmať, pretože sme pokryli všetky od 1/2 až po 1/6 a už vieme, že nič menšie nie je prípustné. Tým pádom sme prešli všetky možnosti, kedy sa prvý pemikam rozpadol na polovice.

Ale čo ak sa prvý pemikam rozpadol na tretiny? Keďže všetky možnosti, ktoré obsahujú 1/2, sme už preskúmali, zvyšné dva pemikamy sa už môžu rozpadnúť iba na tretiny alebo ešte menšie kúsky. Ak sa aj druhý pemikam rozpadol na tretiny, musel sa aj tretí, čím dostávame ďalšie riešenie: ***a* = 3, *b* = 3, *c* = 3**.

Na tomto poslednom riešení tiež vidíme, že naša práca sa skončila. Prečo? Pretože ak by sme ktorýkoľvek z kúskov 1/3+1/3+1/3 nahradili menším, museli by sme niektorý iný zväčšiť, aby ostal zachovaný súčet 1. Zväčšenie tu ale pripadá do úvahy iba jediným spôsobom, a to na 1/2. No a my sme už všetky možnosti obsahujúce 1/2 preskúmali.

Môžeme teda s čistým svedomím prehlásiť, že úloha má **3 riešenia**: pemikamy mohli byť rozdelené na **2, 3, a 6** častí, alebo **2, 4 a 4** časti, alebo **3, 3 a 3** časti.

Bodovanie:
za jedno riešenie – 1b.; za každé ďalšie – 0,5b.; dôkaz bez opakovania – 2,5b.; dôkaz aj s opakovaním – 0,5b.; za nepresnosti alebo dobré nápady som strhal príp. pridával 0,5b.

Poznámka:
Kto chce, môže si záverečnú úvahu, prečo ďalšie možnosti netreba skúmať, premyslieť do takejto jedinej krásnej vety: *ak má byť súčet troch čísel rovný 1, musí byť aspoň jedno číslo aspoň 1/3*.

p-mat

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

APVV

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09