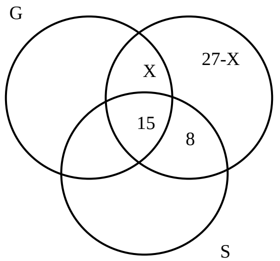
Príklad S5: Trpasličie jazyky *opravovala Michaela „Myšička“ Němcová*

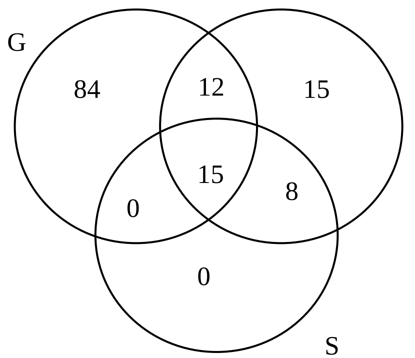
Zaznačme si to, čo vieme, do obrázku. Každý kruh reprezentuje daný jazyk, presnejšie počet trpaslíkov, čo ním hovoria. Prienik dvoch (prípadne troch) kruhov znamená, že daný trpaslík hovorí <u>práve</u> týmito dvomi (tromi) jazykmi... Takže, začnime….

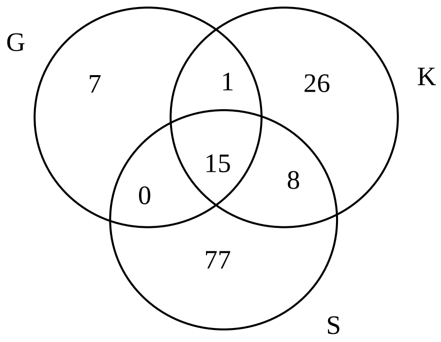
Tých, čo hovoria všetkými tromi jazykmi, je 15, v strednom políčku teda bude číslo 15.
Tých, čo hovoria sulalsky a korlacky, je 23. Tam je však zahrnutých aj tých 15, ktorí vedia všetky jazyky. Preto <u>iba</u> sulalsky a korlacky vie *23-15=8* trpaslíkov.
Tých, čo vedia korlacky, je o 42 viac ako tých, ktorí vedia len po sulalsky a korlacky. To máme *42+8=50*. Ak si počet trpaslíkov, ktorí hovoria len korlacky a gulumunsky označíme *X*, tak nám vychádza, že len po korlacky vie *50-15-8-X=27-X* trpaslíkov. Ale každopádne vieme, že korlacky (a možno ešte nejak inak) rozpráva 50 trpaslíkov.



Do prázdnych políčok sa nám ešte musí zmestiť *134-50=84* trpaslíkov. Ja tvrdím, že za žiadnych okolností sa nemôže stať, aby najpoužívanejším jazykom bola korlačtina. Prečo? Po sulalsky hovorí už aspoň 23 trpaslíkov, po gulumunsky aspoň 15. To znamená, že po gulumunsky by už nemohlo hovoriť viac ako ďalších *50-15=35* trpaslíkov a po sulalsky viac ako ďalších *50-23=27* trpaslíkov. Lenže *35+27<84* (tu by ešte stálo za úvahu porozmýšľať, ako to ovplyvňujú trpaslíci, ktorí hovoria len po gulumunsky a sulalsky, to si však rozmyslite sami), to sa tam nenapchá. Takže korlačtina nemôže byť najpoužívanejším jazykom.

Takže najpoužívanejším je gulumunčina alebo sulalčina. Ukážme, že obe možnosti vyhovujú. Napríklad tak, že nájdeme jedno riešenie pre každú možnosť.





Sami si odskúšajte, že v prvom prípade vedú gulumunsky hovoriaci trpaslíci a v druhom sulalsky hovoriaci trpaslíci. A skúste si aj overiť, či platia podmienky zadania.

Odpoveď: Snehulienka bude hovoriť gulumunčinou, alebo sulalčinou.

Bodovanie: Za riešenie bolo 1,5 bodu, za postup alebo jeho časť do 2,5 bodu a za správne zdôvodnenie možností riešení bol 1 bod.

PIKOMAT, 23. ročník **školský rok 2005/2006**

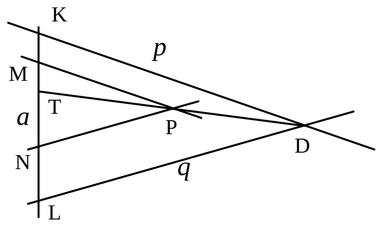
organizátor korešpondenčného seminára — P-MAT n.o.

NADÁCIA INGENIUM — podporuje odborný rast organizátorov seminára

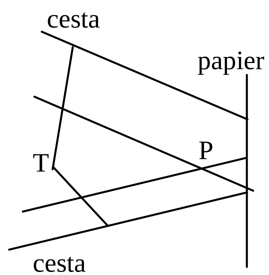
Vzorové riešenia 2. série letnej časti kategórie 7-9

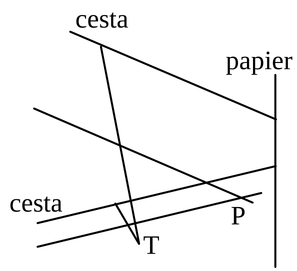
Príklad S1: Prepad piadimužíkov *opravoval Martin „Panda“ Svetlík*

Na začiatok treba povedať, že existuje viac spôsobov ako sa dá nájsť bod P podľa zadania, pretože ako to už v matematike býva, záleží na uhle pohľadu (a nápade, ktorý dostaneme :). Takže si ukážeme ten spôsob, ktorý napadol mne.
Máme zadané dve priamky (nazvime ich *p* a *q*) a bod T niekde mimo nich. Hľadáme stred medzi bodom T a priesečníkom priamok (označme si ho D ako domček). Nakreslime si situáciu tak, ako keby bola celá na papieri a poznali by sme aj bod P. Cez bod P si nekreslíme rovnobežky s *p* a *q*, a ďalšiu priamku *a*, ktorá prechádza bodom T a pretína všetky štyri priamky. Ako vidíme, trojuholníky LTD a NTP sú podobné (jeden uhol majú spoločný a ďalšie dve dvojice vznikli na rovnobežkách preťatých priamkami TD a *a*). V podobných trojuholníkoch platí, že všetky odpovedajúce si dvojice strán majú dĺžky v rovnakom pomere. A keďže vieme, že |TD| = 2|TP|, tak aj |TL| = 2|TN|. Obdobne si vyjadríme, že |TK| = 2|TM|. Čiže body M a N sú stredy úsečiek TL a TK.



Čo nám teda stačí na narysovanie hľadaného bodu P?
1) Narysujeme priamky, ktoré pretnú dané priamky *p* a *q* a budú prechádzať bodom T (je jedno, či cez bod T spravím priamku jednu alebo dve, aj tak získam každou z nich podobné trojuholníky)
2) Zoberieme si úsečku tvorenú bodom T a priesečníkom priamky *p* s nami narysovanou priamkou. Podobne pre priamku *q*. Nájdeme stredy týchto úsečiek.
3) Týmito stredmi vedieme rovnobežky s danými priamkami.
4) V priesečníku týchto priamok je bod P.





Bodovanie: Za úplne správne riešenie aj s odôvodnením, prečo to tak funguje a platí, som dával 5 bodov (nečakane :-). Ak Vaše riešenie nebolo všeobecné (to znamená, že sa napríklad nedalo použiť, ak sa bod T nenachádzal „medzi“ cestami), boli maximálne 4 body. Tu som dával pozor aj na toto: ak je bod P na papieri, tak všetko, čo ste pri jeho konštrukcii použili, sa musí tiež zmestiť na papier (v každom prípade, nie len v tom, ktorý ste nakreslili – na toto pozabudli najmä tí, ktorí využili uhlopriečky rovnobežníka). Ak ste nevysvetlili, prečo sa to dá narysovať práve tak, ako ste to urobili, mohli ste stratiť nejaké ďalšie polbodíky.

Príklad S2: Prefarbovanie kachličiek *opravovala Alexandra „Sašenka“ Podolová*

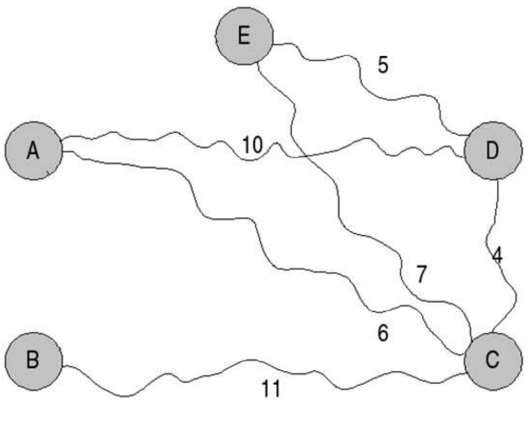
V tomto príklade ste veľmi ľahko zistili, že jedna oranžová kachlička nikdy nezostane. My sme chceli, aby ste prišli na to, prečo to nie je možné.
Dalo sa to vysvetliť viacerými spôsobmi, ukážme si dva.

1. Počet bielych aj oranžových kachličiek bol na začiatku párny, konkrétne 32. Pri prefarbovaní sa vždy počet bielych aj oranžových menil o párny počet (8, 6, 4, 2, 0). Ak k párnemu číslu (32) pripočítame alebo od neho odpočítame párne číslo, vždy z neho bude len párne číslo, a teda nikdy nedostaneme číslo 1, čo je číslo nepárne.
2. Alebo ste si to mohli ľahko skúsiť pre štvorec 2x2, pre ktorý zistíte, že to nejde (napríklad odskúšaním relatívne nízkeho počtu možností). A keďže na šachovnici 8x8 má zostať jediný štvorček oranžový, tak na tej šachovnici musí existovať štvorec 2x2 s jediným oranžovým štvorčekom (rozmyslite si prečo). Ale takýto štvorec 2x2 neexistuje, teda úloha nie je splniteľná ani pre veľkú šachovnicu.

Bodovanie: 5 bodov dostali tí, ktorí mi napísali aspoň jednu z možných verzií. 2,5 bodu majú tí, ktorí mi napísali, že sa dá dosiahnuť, aby celá šachovnica bola jednofarebná alebo je farebný najmenej jeden riadok. 0,5 bodu dostali tí, ktorí mi napísali len to, že sa to nedá a nič viac. Ostatné body boli podľa kvality popisu.

Príklad S3: Zmätený domček *opravoval Martin „Iso“ Ilčík*

Snažíme sa zrušiť niektoré chodby v domčeku tak, aby sa aj naďalej dalo dostať z každej miestnosti do každej (nie nutne priamo), a aby dĺžka zostávajúcich chodieb bola najmenšia možná.
Ak si zoradíme dĺžky chodieb podľa veľkosti, dostaneme: 20, 19, 17, 14, 11, 10, 7, 6, 5, 4. A teraz poďme postupne rúcať! ;-) Stále sa budeme snažiť zrušiť tú najdlhšiu chodbu, pričom si budeme dávať pozor na prvú podmienku.
Zrušenie chodby dĺžky 20 neohrozí prístup do miestností B a E – teda chodbu zrušíme. Podobne chodby dĺžky 19, 17 a 14. (Pozrite si obrázok v zadaní a premyslite si prečo!)
Dostali sme teda takúto situáciu:



V poradí je teraz chodba dĺžky 11. Ale pozor! Ak by sme ju zrušili, oddelili by sme tým miestnosť B od ostatných miestností. Čo však nechceme, teda chodbu BC nezrušíme. Ďalej pokračujeme chodbami dĺžok 10 a 7. (Opäť si treba premyslieť či ich zrušenie neoddelí niektoré miestnosti od iných.)
Zostali štyri chodby s celkovou dĺžkou 26 krokov. Presvedčte sa sami, že z nich už žiadnu chodbu nemôžeme zrušiť.

Bodovanie: Za správne riešenie ste mohli získať 2,5 bodu (ak ste nezrušili hranu CE, tak 1 bod). Zdôvodnenie správneho riešenia bolo za 2,5 bodu, strhával som ak chýbali rozumný postup, neexistencia menšieho riešenia, počet potrebných hrán...

Príklad S4: Šantivé huby *opravovala Vlasta „Krupla“ Gubášová*

Podstata riešenia tejto úlohy bola veľmi jednoduchá – bolo potrebné zvoliť si nejaký systém postupného zapisovania dovolených poradí odovzdávania húb a potom tento systém dodržiavať. Asi najjednoduchší bol systém, podľa ktorého vždy, keď môžeme zaradiť 20-gramovú hubu, tak ju zaradíme. Zaradiť máme tri 20-gramové huby. Začneme prvou, potom, len čo môžeme, zaradíme druhú, a nakoniec aj tretiu. Pochopiteľne – medzi ne sa vsúvajú podľa potreby 10-gramové huby. Vyhovujúce poradie všetkých ôsmych húb si zapíšeme. Ak sa nám však už takýto zápis vyskytoval, tak namiesto jeho zapísania posunieme poradie tretej 20-gramovej huby o jedno doprava (teda 10-gramová huba, idúca v poslednom zápise za touto 20-gramovou hubou, ju predbehne). Ak už tretiu nemôžeme zaradiť kvôli opakovaniu zápisu, tak posunieme druhú o jedno doprava. Ak ani takýto posun nie je možný, tak posunieme prvú v poradí o jedno doprava. Pre istotu pripomeniem, že po posunutí napríklad druhej huby má prioritu pravidlo, že zaradíme 20-gramovú hubu, len čo to je možné. Výsledok zápisov je v nižšie uvedenej tabuľke a jasne hovorí, že celkovo bolo možné, aby sa trpaslíci postavili do radu 28 spôsobmi.

	1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8
1	10	20	10	20	10	20	10	10	**15**	10	10	20	10	20	10	10	20
2	10	20	10	20	10	10	20	10	**16**	10	10	20	10	10	20	20	10
3	10	20	10	20	10	10	10	20	**17**	10	10	20	10	10	20	10	20
4	10	20	10	10	20	20	10	10	**18**	10	10	20	10	10	10	20	20
5	10	20	10	10	20	10	20	10	**19**	10	10	10	20	20	20	10	10
6	10	20	10	10	20	10	10	20	**20**	10	10	10	20	20	10	20	10
7	10	20	10	10	10	20	20	10	**21**	10	10	10	20	20	10	10	20
8	10	20	10	10	10	20	10	20	**22**	10	10	10	20	10	20	20	10
9	10	20	10	10	10	10	20	20	**23**	10	10	10	20	10	20	10	20
10	10	10	20	20	10	20	10	10	**24**	10	10	10	20	10	10	20	20
11	10	10	20	20	10	10	20	10	**25**	10	10	10	10	20	20	20	10
12	10	10	20	20	10	10	10	20	**26**	10	10	10	10	20	20	10	20
13	10	10	20	10	20	20	10	10	**27**	10	10	10	10	20	10	20	20
14	10	10	20	10	20	10	20	10	**28**	10	10	10	10	10	20	20	20

Bodovanie: Bodovanie bolo rozškálované podľa počtu nájdených možností, ktorý bol závislý na úplnosti systému zapisovania týchto možností. Za 5 bodov boli riešenia, ktoré našli všetky možnosti a popísali aj systém zapisovania. Tí, čo mali všetky riešenia bez systému, majú 4,5 bodu. Potom body klesali spolu s počtom nájdených možností (ale ani viac možností neznamenalo viac bodov:-)