Takto teda vyzerá výherná stratégia pre Janka, ktorý ide ako druhý. Vidíme, že Zuzka okrem prvého ťahu nemôže vôbec ovplyvniť priebeh hry. Ale aj keby dala na začiatku nulu, nič by sa tým nezmenilo, len by naše číslo malo na začiatku o dve nuly viac (stále by bolo deliteľné deviatimi, Janko by takisto použil svoju stratégiu a vyhral by). Vidíme, že Janko vždy vyhrá, a teda pre Zuzku neexistuje žiadna výherná stratégia.

Poznámka: Mnohí z vás boli predsvedčení, že treba nájsť najmenšie číslo, ktoré spĺňa podmienky zadania. Ako vidíme, vôbec to nemusí byť najmenšie číslo, stačí, že zabezpečí jednému z hráčov víťazstvo.

Bodovanie: Ak ste zdôvodnili deliteľnosť, prípadne napísali aj nejaké ukážky hier – 1 až 2 body. Podľa toho, do akej miery ste odhalili stratégiu – 2 až 5 bodov. Za nepresnosti, nedostatky som strhávala 0,5 – 1,5 boda.

Príklad S5: Veštkyňa. *Opravovala Jana Štolcová.*

Otázka znela: *bude to tak vždy?* To znamená, že by to malo naozaj platiť pre akékoľvek číslice 0-9. Keď povieme *akékoľvek*, asi nám neostáva nič iné, ako označiť si ich A a B (alebo vypísať 100 možností, čo tiež nie je nesprávne, iba trochu časovo náročnejšie). Vešticino číslo potom vyzerá takto: ABABAB. Aby som sa však vedel zamýšľať nad deliteľnosťou, s písmenami asi nevystačíme. Vieme však, že každé číslo sa dá rozpísať na násobky jeho jednotlivých cifier! V tomto prípade to bude vyzerať takto: 100 000A + 10 000B + 1 000A + 100B + 10A + B. Teraz mi ešte treba odpratať „A“ a „B“ aby nezavadzali, najlepšie do nejakej zátvorky :)... = 101 010A + 10 101B. = 10 101*(10A + B).. A máme, čo sme chceli. Už vieme, že každé číslo ABABAB si môžeme veľmi jednoducho prepísať na: 10101*(10A + B). Tu už nie je problém skontrolovať, či je deliteľné 7. Aha: 10101*(10A + B) = 7x1443(10A + B). A je to! Každé 6-ciferné číslo tvaru ABABAB je násobkom 7, teda je deliteľné 7, pre akékoľvek číslice A a B.
Úloha sa dala riešiť aj inak. Existujú rôzne spôsoby zisťovania, či je číslo deliteľné 7 alebo nie. Mnohí z vás nejaké poznali, iní niekde našli. Napr. číslo je deliteľné 7 práve vtedy, ak je 7 deliteľný súčet vypočítaný tak, že sa číslice *od zadu* postupne vynásobia číslami (periodicky sa opakujúcimi): 1, 3, 2, 6, 4, 5. Teda v našom prípade 1B + 3A + 2B + 6A + 4B + 5A = 7B + 14A = 7(B + 2A). Takže znovu nám vyšlo, že pre ľubovolné A, B je číslo ABABAB deliteľné 7.

Bodovanie: Za ukázanie, že všetky vešticine čísla sú deliteľné 7 - samozrejme 5 bodov (nech ste to dokázali akokoľvek, aj vyskúšaním všetkých možností). Strhávala som do 1 bodu pokiaľ ste na niečo zabudli, príp. ak boli nejaké mierne nedostatky v zdôvodnení prečo to platí pre všetky.

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

podporuje odborný rast organizátorov seminára

PIKOMAT

Vzorové riešenia 2. série zimnej časti, kategória 7-9

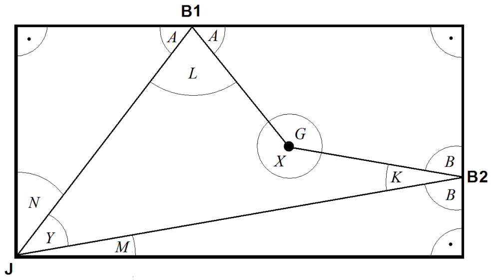
Príklad S1: Stroj času. *Opravovala Nina Kuklišová.*

Najprv sa pozrime na to, aká by bola najrýchlejšia cesta prejdenia všetkými bránami (odhliadnuc od posúvania času). Keďže zadanie sa nevyjadrovalo celkom presne o tom, či cestovateľ musí alebo nemusí prechádzať stredom mesta a či môžeme vojsť a potom hneď aj vyjsť tou istou bránou bez veľkej straty času, viacero možností bolo uznaných za správne. Mohli ste ísť: bránou do mesta - cez stred mesta – ďalšou bránou von – vedľajšou zas dnu - a tak ďalej; na takéto „kolečko“ okolo mesta bolo treba 3 hodiny a 50 minút. Alebo obchádzať mesto po vonku a každou bránou iba vojsť-vyjsť; na to Vám stačila 1hod 50min, ak by sme zanedbali čas strávený prechádzaním cez brány.
Ako to zladiť s časovým posunom? Otázka znela: *za aký najkratší čas sa dá prejsť všetkými bránami a mať na konci na hodinkách rovnaký čas, ako keby brány čas vôbec nemenili.* Pozor, „ako keby nemenili čas“ neznamená mať tam znova „čas vstupu“ do mesta, ale „čas vstupu + trvanie prechádzky“! Ďalší problém: niektorí z Vás považovali za začiatočný čas ten, ktorý budú hodinky ukazovať po prvom prejdení a vyjdení bránou. Zadanie to síce takto nemyslelo, no keďže sa asi nevyjadrilo veľmi presne, body sa za to nestrácali. Pôvodne by sa však mal považovať za starý čas ten, ktorý cudzincove hodinky ukazovali ešte predtým, než 1.krát vstúpil do mesta.
Prvá kľúčová vec: *Aj keď sa čas na hodinkách cudzinca po každom výstupe z mesta zmení, na konci ostane na jeho hodinkách čas určený len posledným vstupom a výstupom.* Druhá kľúčová vec: *Zadanie neudáva konkrétny čas vstupu do mesta a teda môže byť akýkoľvek.* To znamená: vyberieme si nejaký čas úplne prvého vstupu a potom zmena pri úplne poslednom výstupe musí byť čas o 1hod 50 min alebo o 3 hod 50 min pokročilejší (čiže posledné dve brány musia byť také, aby nám tento čas určili).
Dá sa to však aj naopak! Najprv sa pozriem, ktorými bránami prejdem poslednýkrát a aký čas mi určia. A potom už si len vypočítam a poviem, že čas vstupu do mesta bol práve 1:50 alebo 3:50 menší ako ten určený čas. Takto by mohlo vyzerať možné riešenie:
1. Do mesta sme 1.krát vošli o 10.05. Začali sme pri bráne číslo XII a pokračovali po vonkajšku mesta v smere hodín, pri každej bráne sme vošli-vyšli. Poslednou bránou – XI – sme vošli(55) a hneď aj vyšli(11) → určila nám čas na konci 11:55, teda o 1 hod 50 min. viac, ako na začiatku. Čiže... hodinky nám na konci ukazujú rovnaký čas, ako keby brány čas vôbec neposúvali.
Takýchto „pochodov mestom“ môže byť pravdaže ešte viac. Všetko závisí iba od toho, ktoré dve brány sa rozhodneme použiť ako posledné.

Bodovanie: Aspoň jedna najkratšia trasa (1:50 alebo 3:50) - 5 bodov. Zabudnuté vstupný a výstupný čas - 4 body. Nezohľadnený časový posun - max 3 body. Dlhšie trasy – 2 až 3,5 bodu. Inak pochopené zadanie – 1,5 až 3 body.

Príklad S2: Biliard. *Opravoval Juraj Pavlovič.*

Veci, ktoré si treba uvedomiť: 1. Že nepoznám presné hodnoty dvoch uhlov ešte neznamená, že nedokážem spočítať ich rozdiel. 2. Treba vedieť, že súčet vnútorných uhlov v každom trojuholníku je 180° a štvoruholníku je 360°.
K správnemu riešeniu nie je veľa čo povedať. Potrebujem vypočítať rozdiel dvoch uhlov, ktorých presné veľkosti nepoznám. Neostáva mi nič iné, ako označiť si všetky neznáme uhly písmenami (ideálne písmenami gréckej abecedy – mne sa to na počítači nepodarilo). Potom už iba zapíšem hľadané uhly tak, aby sa v tom zápise podľa možností vyskytovali tie isté neznáme(písmená) a dúfam, že pri odčítaní sa tieto neznáme písmená odčítajú. Načrtnem si obrázok biliardového stola aj s možnými dráhami biliardovej gule do jamky. Nepoznám veľkosť žiadneho uhla okrem pravých uhlov v rohoch biliardového stola. Označím si ich preto písmenami. Existuje viacero možností, ako vyjadriť uhly X a Y. Uvádzam iba jednu z nich:



$M = 180° - (90° + B) = 90° - B;$
$N = 180° - (90° + A) = 90° - A;$
$\boldsymbol{Y} = 90° - (M+N) = 90° - 90°+B–90°+A = \underline{A + B - 90°};$

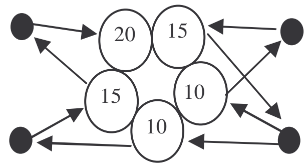
$L = 180° - 2A;$
$K = 180° - 2B;$
$\boldsymbol{X} = 360° - (Y + L + K) = 360° - (A + B - 90°) - (180° - 2A) - (180° - 2B) = \underline{A + B + 90°};$

X – Y = (A + B – 90°) – (A + B + 90°) = <u>180°!</u>

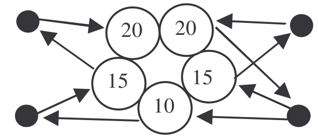
Bodovanie: každý správny spôsob alebo úvaha vedúce k správnemu výsledku – 5 bodov; bez nahradenia uhlov premennými – 0 až 3 body.

Príklad S3: Turisti. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*

Najprv si musíme povedať, čo ste mali v tomto príklade rátať. „5 jednotiek neznámej meny“ znamená, 5 korún, 5 dolárov, 5 rubľov, 5 nevieme-čoho (nie však 5 mincí, ako si mysleli niektorí z vás). No vieme, že turisti mali len mince v hodnote 10, 15 a 20 jednotiek tejto meny (nazvime ich minca 10, minca 15 a minca 20). Napriek tomu každý z nich zaplatil. Toto bol prvý problém u niektorých z vás. „Každý zaplatil“ totiž neznamená, že jeden zaplatil za štyroch mincou 20 a všetko bolo OK. „Každý zaplatil“ znamená, že každý mal nakoniec mince v celkovej hodnote o 5 menšej ako na začiatku. Samozrejme, šofér autobusu nemal na začiatku žiadne mince tejto neznámej meny (čo sa síce v zadaní nepíše, ale je to úplne prirodzené – videl už niekto z vás šoféra slovenského autobusu, ktorý by mal pri sebe iné ako slovenské mince?). Ako mu teda mohli zaplatiť každý presne 5? Nejako sa dohodnú. Napríklad si vytvoria nejaký spoločný bank - každý do neho niečo dá, potom si odtiaľ zoberie o 5 menej a zvyšok dajú šoférovi.
Keďže mince s hodnotou 5 nie sú, každý dá do banku mince v hodnote väčšej ako 5. To znamená, že každý si musí aspoň jednu mincu zobrať naspäť (to je aspoň 20 mincí) aby mal presne o 5 jednotiek tej meny menej ako predtým. No a nejaké mince pôjdu šoférovi (to je v najlepšom prípade 5 mincí – 5 dvadsiatok). Vidíme, že menej ako 20 + 5 = 25 mincí im v žiadnom prípade nepostačí. Skúsme sa pozrieť, ako by teda mohli platiť a či sa to s tými 25 mincami dá presne zaplatiť.
Ak dá niekto do banku mincu 20, musí si odtiaľ zobrať mincu 15 → Niekto tam musí dať mincu 15; a ten si potom zoberie mincu 10 → Niekto tam musí dať 10; ten by si potom zobral 5, no minca 5 neexistuje. Ale keď tam dá 2×10, môže si zobrať 15, a tú druhú jeho mincu 10 si zoberie práve ten, kto tam dal tú ďalšiu 15 (obr.1).



V banku týchto štyroch turistov ostane jedna minca 20, čo je presne suma, ktorá pôjde vodičovi za týchto 4 turistov.
Druhá možnosť platenia vo štvorici je táto: (obr.2).



No a keď sa našich 20 turistov rozdelí práve do piatich takýchto štvoríc a takto sa dohodnú, podarí sa im zaplatiť a <u>stačí im na to 25 mincí</u> (5 štvoríc × 5 mincí), čo sme si ukázali, že je aj teoretické minimum.

Bodovanie: Ukázané, ako môžu zaplatiť 25 mincami - **4b**. Navyše aj ukázané, že s menším počtom mincí to nejde - **5b**. Keď každý platil, no spolu potrebovali viac ako 25 mincí - max **3 body.** Ak ste nedodržali podmienku, že <u>každý</u> zaplatil, veľa bodov ste nedostali. Samozrejme, v každej z týchto skupín rozhodovala o konečnom počte bodov úroveň opísania postupu a myšlienok.

Príklad S4: Čísla. *Opravovala Katka Beláková.*

Skôr, ako začneme riešiť príklad, musíme si ujasniť pár základných vecí, ktoré sa nám zídu a sú nevyhnutné pre samotné vyriešenie príkladu.
1. Čo je to stratégia? Nájsť stratégiu znamená nájsť taký postup konania, akým vyhrám vždy, nech už robí súper (pravdaže v rámci pravidiel) čokoľvek.
2. Číslo je deliteľné deviatimi, keď jeho ciferný súčet je deliteľný deviatimi. Keďže naše číslo sa skladá iba z jednotiek a núl, tak aby bolo deliteľné deviatimi, musí obsahovať najmenej deväť jednotiek. Na počte núl nezáleží, lebo tie nijako neovplyvňujú ciferný súčet. Najmenší prirodzený násobok deviatky je číslo deväť, teda vyhrá ten hráč, ktorý napíše deviatu jednotku.
Aby som naozaj našla stratégiu (a nie len náhodný priebeh hry), musím sa snažiť ovplyvniť súperove ťahy v môj prospech. Keď sa mi to podarí, môžem hru smerovať tak, aby som vyhrala. Lepšiu pozíciu má preto Janko, ktorý sa zariadi podľa toho, čo dá Zuzka. Ak ona začne 1, Janko dá tiež 1. V tomto momente hrajú podmienky hry v prospech Janka (nemôžu ísť tri nuly ani tri jednotky za sebou). Zuzka preto musí dať už nulu. Ak dá Janko tiež nulu, má ju v hrsti, lebo ona už musí dať jednotku. Takto to ďalej pokračuje (Janko využíva „opakovaciu stratégiu“ – opakuje po Zuzke a tým ju núti meniť číslo) a vyzerá to nasledovne: 110011001100110. V tejto chvíli už mám osem jednotiek a Janko už po Zuzke prestane opakovať, dá jednotku a tým pádom vyhral.