PIKOMAT, 23. ročník školský rok 2005/2006

P-MAT n.o. NADÁCIA INGENIUM

organizátor korešpondenčného seminára podporuje odborný rast organizátorov seminára

Vzorové riešenia 3. série letnej časti kategórie 7-9

Príklad S1: Bludisko *opravovali Katarína „Kitty“ Korcsoková a Jarmilka Malíková, riešenie podľa Alexandry Porembovej*

Budeme postupovať tak, že do každého políčka napíšeme počet spôsobov, ktorými sa doňho dá dostať. Začneme prvým riadkom a stĺpcom. Na každé miesto v prvom riadku sa dá dostať len jedným spôsobom, lebo trpaslíci môžu ísť len doprava a dole. To iste platí o prvom stĺpci, teda políčka A1 až A10 budú mať hodnotu 1, rovnako ako políčka A1 až J1. Keďže trpaslíci sa môžu pohybovať len doprava a dole, pre určenie ďalších hodnôt budeme sčítavať čísla, ktoré susedia s hľadaným číslom zhora a zľava[1]. Tmavým políčkam sa priradí hodnota 0, lebo na tie miesta sa dostať nedá. Na všetky dostupné miesta v druhom riadku sa dá dostať len jedným spôsobom, lebo k nim vedie len jedna cesta, cesta zhora s hodnotou 1. Postupne dopĺňame čísla do všetkých políčok, napr. do B3 alebo C3 vpíšeme číslo 1, lebo sa tam dá dostať len jedným spôsobom (0 zhora + 1 zľava). Ale napríklad do políčka D3 už napíšeme číslo 2, lebo v hornom aj ľavom políčku je číslo 1, teda *1+1=2*. Takýmto spôsobom vyplníme celé bludisko.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1			1		1		1		1
3	1	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4	1		1		2			4		5
5	1		1	1	3	3	3	7	7	12
6	1	1	2		3		3			12
7	1		2		3	3	6	6	6	18
8	1	1	3	3	6		6			18
9	1				6		6		0	18
10	1	1	1	1	7	7	13	13	13	**31**

Z takto vyplneného bludiska vidíme, že do políčka J10 sa dá dostať 18+13=31 spôsobmi. Teda trpaslíci vyčerpajú všetky možnosti po 31 dňoch.

[1] Číslo X nad aktuálnym políčkom Z vyjadruje počet spôsobov, ako sa dá dostať do políčka X, resp. na Z zhora. Číslo Y vyjadruje počet spôsobov, ako sa dá dostať do Y, resp. do Z zľava. Celkový počet spôsobov, ako sa dostať do Z je súčet čísel X a Y.

	X
Y	Z

Príklad S4: Rozhodovaciu kocku *opravoval Mišo Kováč*

Gratulujem! Takmer všetci ste to vyriešili správne. Padla otázka, že ako je možné, že som videl práve 5 stien, aj keď sa kocka nehýbala...vysvetlenie je také, že som videl vrchnú stenu a štyri bočné, lebo som si kocku obišiel:-).

Na ceste k správnemu riešeniu si bolo treba uvedomiť, že každé číslo na stene kocky bolo väčšie alebo rovné 10, lebo keď sa sčítajú 4 najmenšie čísla na vrcholoch *1+2+3+4*, výsledok je práve toto číslo. Takisto bolo menšie alebo rovné 26, čo je výsledok súčtu najväčších 4 čísel *8+7+6+5*. Aspoň 5 čísel na stenách kocky boli prvočísla, tak sa pozrime, ktoré to môžu byť: 11, 13, 17, 19, 23. Všetky ostatné prvočísla sú buď menšie ako 10 alebo väčšie ako 26. Čísla na stenách kocky majú byť rôzne, preto na piatich stenách, ktoré som videl, bolo práve týchto 5 prvočísiel. Po tomto nasledovali rôzne úvahy. Najlepšie dve sem napíšem.

1. Každý vrchol susedí s troma stenami, preto je súčet čísel na stenách *3.(1+2+3+4+5+6+7+8)=108*. Súčet čísel na stenách, ktoré vidím, je *11+13+17+19+23=83*. Číslo na stene, ktorú nevidím, je preto *108-83=25*
2. Súčet čísiel na protiľahlých stenách je rovný súčtu čísel na všetkých vrcholoch (skús si to predstaviť), to je *1+2+3+4+5+6+7+8=36*. Protiľahlé steny sú potom 13 a 23, 17 a 19, 11 a 25. Číslo na stene, ktorú nevidím, je potom 25.

Ostatné úvahy boli oveľa zložitejšie, takmer všetky síce viedli k správnemu riešeniu, ale bolo potrebné napísať dostatočný postup.

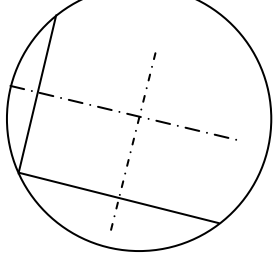
Bodovanie: Za správny výsledok bol 1 bod, ďalšie body som prideľoval podľa kvality postupu.

Príklad S5: Vchod k Piadimužíkom *opravoval Martin „Panda“ Svetlík*

Tento príklad bol pomerne jednoduchý. Stačilo sa zamyslieť nad tým, čo je to vlastne kružnica – je to množina všetkých bodov, ktoré majú od daného bodu (stredu) konštantnú (rovnakú) vzdialenosť. Tejto vzdialenosti hovoríme polomer. Keď sa na túto vetu pozrieme z druhej strany, tak môžeme povedať, že stred kružnice je rovnako vzdialený od každého bodu na kružnici. Ako ho teda nájsť, keď máme daných len zopár bodov na kružnici (malá časť kružnice)?

Zvolíme si na tej „malej časti“ ľubovoľné dva body. Vieme, že stred kružnice je rovnako vzdialený od jedného aj druhého. A keďže os úsečky je množina všetkých bodov, ktoré sú rovnako vzdialené od oboch krajných bodov tejto úsečky, tak hľadaný stred kružnice bude ležať na osi tejto úsečky (úsečka spájajúca dva body na kružnici sa nazýva tetiva).

Určíme si teraz ďalšiu tetivu, rôznobežnú s tou prvou, a spravíme aj jej os (keby boli rovnobežné, táto os by bola totožná s tou prvou).



Keďže stred má byť rovnako ďaleko od prvých dvoch bodov, a zároveň aj od druhých dvoch, tak musí ležať na prvej osi, a zároveň aj na druhej osi. To znamená, že leží na priesečníku osí tetív.

Tým pádom sme dokázali, že ak sa malou časťou (ktorá sa spomína v zadaní) myslia aspoň tri body (aby sme vedeli narysovať aspoň dve tetivy), tak polohu stredu určiť dokážeme. Keď máme dané len dva body, stred nemôžme nájsť, pretože dva body neurčujú jednoznačnú kružnicu.

Vlastne sme si ukázali to, ako narysovať kružnicu opísanú trojuholníku. Keďže vrcholy tohto trojuholníka majú ležať na tejto kružnici, tak jeho strany sú vlastne tetivami hľadanej kružnice.

Bodovanie: Toto bol jednoduchý príklad na napísanie riešenia, ale mnohí z vás pozabudli na zdôvodnenie niektorých vecí. Za to som strhával do 1,5 bodu.

Komentár: Tento príklad sa dal riešiť rôznymi spôsobmi, čí už skúšaním, ale pri tomto spôsobe najčastejšie vznikali chyby, alebo logickým uvažovaním a nájdením nejakej stratégie. Vo vzorovom riešení je uvedená jedna z týchto stratégií, ale nie jediná.

Bodovanie: Ak bol pri spôsobe skúšaním a počítaním cestičiek neprehľadný obrázok, strhávali sme 0,5 bodu. Rovnako sme aj pri iných spôsoboch riešenia strhávali 0,5 bodu, keď chýbal dôkaz, že cestičiek je naozaj taký počet alebo bola v riešení nejaká drobná chyba, napríklad zlé sčítanie. 2 body sme strhávali vtedy, keď zakreslené cesty v obrázku boli súvislé a v podstate tvorili to isté bludisko, len inak zakreslené.

Príklad S2: Dámy *opravovala Michaela „Myšička“ Němcová, riešenie podľa Michala Hagaru*

Dáma v šachu ohrozuje riadok, stĺpec aj obe uhlopriečky. Dáma však nesmie preskakovať, a tak neohrozuje figúrku, ak medzi dámou a tou figúrkou je ešte jedna figúrka.

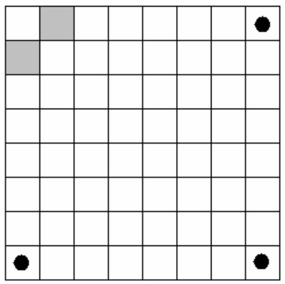
Za uhlopriečku som si označil všetky štvorčeky ležiace na jednej diagonále. Aj keď ten štvorček bol iba jeden.

Máme 8 riadkov, 8 stĺpcov a 30 uhlopriečok. Každá dáma ohrozuje l riadok, 1 stĺpec a 2 uhlopriečky. Dámy sa ohrozujú navzájom, ak jedna ohrozuje druhú, tak aj druhá ohrozuje prvú.
Teraz rátajme s tým, že sa dámy ohrozujú iba po riadkoch a stĺpcoch. Aby všetky dámy ohrozovali dve iné dámy, tak na šachovnicu môžem dať najviac 16 dám. To sa podarí, ak dám do riadku a stĺpca po 2 dámy. Potom každá bude ohrozovať dámu v riadku a v stĺpci (to sú 2). Ak by som dal do nejakého riadku/stĺpca 3 dámy, tak tá v prostriedku bude ohrozovať už dve a do stĺpca/riadku s ňou už žiadnu nemôžem dať, takže zasa sú to v priemere 2 dámy na riadok a stĺpec. To isté platí, aj keď dám do nejakého riadku/stĺpca 4 a viac dám (tam už budú 2 a viac stĺpcov/riadkov, kde už ďalšiu dámu nemôžem dať).

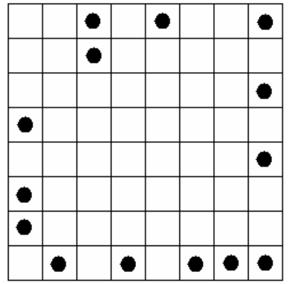
Ak by som niekde pridal nejakú sedemnástu dámu, tak by ju museli dajaké 2 ohrozovať, ale už nemajú ktoré, lebo všetky sa už navzájom ohrozujú presne podľa podmienky, teda by boli 2 dámy ktoré ohrozujú 3 iné. Najviac by teda teoreticky mohlo byť 16 dám.

Teraz to treba overiť, aj keď sa ohrozujú po uhlopriečkach. Každá už ohrozuje 2 dámy (jednu v riadku a jednu v stĺpci. Poprípade ak sú v nejakom riadku/stĺpci 3 a viac, tak niektoré iba v riadku/stĺpci). Už teda po uhlopriečke nemôžu ohrozovať žiadnu inú. Každá dáma ohrozuje 2 uhlopriečky, potrebovali by sme teda *2.16=32* uhlopriečok, ale tých je len 30. Takže sa tam 16 dám nezmestí...

Ideme overiť, či môžeme mať 15 dám. Rátajme s tým, že sa dámy ohrozujú iba po riadkoch a stĺpcoch. Do 7 riadkov a 7 stĺpcov dám po 2 dámy (prípadne viac...potom platí, to čo predtým) a do 1 riadku a 1 stĺpca 1 dámu. Ostane nám jeden riadok a jeden stĺpec s jednou dámou. Ak by tá, ktorá je sama v riadku a v stĺpci bola jedna, tak by už nemala koho ohrozovať (ešte neohrozuje žiadnu), lebo už všetky niekoho ohrozujú. Ak by to boli dve (jedna by bola sama v riadku a druhá v stĺpci), tak by každá z nich ohrozovala zatiaľ jednu (jedna v stĺpci a druhá v riadku) a navzájom by sa ešte mohli ohrozovať (po uhlopriečke).



Teraz to treba overiť aj keď sa ohrozujú po uhlopriečkach. Máme dve dámy, ktoré už ohrozujú jednu a navzájom sa majú ohrozovať po uhlopriečke. Zvyšné dámy už ohrozujú 2 iné dámy, a tak na uhlopriečke s nimi nemôže už byť žiadna iná. Potrebujeme teda *15.2-1=29* uhlopriečok (*15.2* sú všetky uhlopriečky, a *-1*, lebo 2 dámy majú jednu spoločnú). Všetky rohové uhlopriečky sa použiť nedajú, pretože keď dáme do všetkých rohov dámy, tak každá z nich ohrozuje jednu po riadku, jednu po stĺpci a jednu po uhlopriečke, a to sú už tri. Ak jednu z nich nepoužijeme, už musíme použiť všetky ostatné uhlopriečky, aby sme použili 29. Ak však použijeme 3 rohy, tak nemôžeme použiť ani uhlopriečku na obrázku č.1 označenú sivo, pretože ak by sme na jedno z jej políčok dali dámu, tak jedna z označených rohových dám by ohrozovala 2 dámy a potom ešte tú na označenej uhlopriečke). 15 dám sa tam teda tiež nevojde.



Potom som sa snažil dať na šachovnicu tých 14 dám. Snažil som sa ich dať čo najviac ku krajom. lebo tam sú uhlopriečky, ktoré ohrozujú, kratšie.

Najviac sa na šachovnicu môže postaviť 14 trpaslíkov (dokázané, že to sa to dá, na obrázku č.2).

Bodovanie: 3,5 b za správne riešenie (-0,3 boda za každého chýbajúceho trpaslíka, riešenie muselo spĺňať podmienku príkladu).
1,5 b za postup, vysvetlenie, obrázok, popis, zdôvodnenie prečo ich nemôže byť viac... Za každý pokus aspoň časť bodov...

Príklad S3: Martinka Klingáča *opravovala Katka Smolárová*

Tento príklad sa dal riešiť viacerými spôsobmi, ukážme si ten, ktorý sa mne osobne páčil najviac;-). Napíšeme si najprv všetky zadané rovnice v takom peknom poradí:

(1) *MAT x I = KMA*
(2) *KMA : T = RI*
(3) *RI x I = AKR*
(4) *AKR : T = PA*
(5) *PA x I = MAT*

Keď sa teraz poriadne pozrieme na tieto príklady, vidíme, že vlastne idú „za sebou“. Všimneme si tiež, že hoci začiatočné číslo postupne trikrát násobíme I a dvakrát delíme T, máme na začiatku aj na konci to isté číslo. Aby sme dostali po úpravách to isté číslo, tak sme museli násobiť a deliť tak, aby sme celkovo dostali 1. To znamená, že *I / T x I / T x I* sa rovná jednej, a z toho dostaneme $T^2=I^3$. Vieme, že *T* a *I* sú čísla od 1 po 9 (0 to byť nemôže, pretože deliť nulou je nezmysel a vynásobením ľubovoľného čísla nulou dostanem vždy 0). Zostavím si tabuľku druhých a tretích mocnín čísel 1-9:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Druhá mocnina	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Tretia mocnina	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Z tejto tabuľky je vidieť, že *T* by mohlo byť 1, ak by *I* tiež bolo 1, to však nevyhovuje podmienke zo zadania, že rôzne písmenká sú rôzne číslice. Jediná iná možnosť je *T=8* a *I=4*. Musíme ešte zistiť ostatné písmenká. Dosadíme si to, čo vieme, do (3):
R4 x 4 = AKR → *R = 6* (pretože *4 x 4* končí na 6) → *64 x 4 = 256*.

Teda vieme, že *A = 2* a *K = 5*. Dosadíme si zistené písmenká do (2):
64 = 5M2 : 8 → *64 x 8 = 5M2* (po vynásobení obidvoch strán 8), a keďže *64 x 8 = 512*, tak vieme, že *M = 1*.

Jediné písmenko, ktoré nám ešte chýba je *P*. To zistíme z (4):
P2 = 256 : 8 → *P = 3*. Máme teda všetky písmenká a jednoduchým dosadením do zadania zistíme, že tieto čísla vyhovujú všetkým rovniciam. Číslo na Martinka Klingáča je teda 32 64 256.

Bodovanie: Za správny výsledok bol 1 bodík, za nejaké to overenie, že je to jediné riešenie 1,5 bodíku a zvyšok (2,5 bodíku ;-) bol za postup.