PIKOMAT
17. ročník šk. rok 1999/2000

Vzorové riešenia 3. série zimnej časti

Príklad 1: (opravovala Alenka Kovárová)

Označme si dvojciferné číslo ako AB. Potom podľa zadania musí spĺňať 2 podmienky: prvá A+B=12, druhá 2.A+3.B=29. Tú druhú rovnicu môžeme napísať ako (A+B)+(A+B)+B=29, čiže 12+12+B=29, z čoho B=5. Keď tento výsledok dosadím do prvej rovnice, dostávam A+5=12. čiže A=7. Ľahko overíme, že číslo 75 spĺňa obe podmienky.

Bodovanie: bez postupu –2b (nedostatočný postup –1b), zlý výsledok –2b, nekompletné riešenie –1b.

Príklad 2: (opravovala Táňa Fislová)

A. R a S sú na sieti na protiľahlých stenách, nikdy nebudú susedné. Kocka sa nedá zostrojiť.
B. M a N susedia na sieti svojimi bočnými stranami (strana v tomto prípade označuje stranu štvorčeka), nie vrchnými. Kocka sa nedá zostrojiť.
C. P susedí na sieti so S svojou spodnou stranou a nie vrchnou. Kocka sa nedá zostrojiť.
D. O a M sú na sieti na protiľahlých stenách, nikdy nebudú susedné. Kocka sa nedá zostrojiť.
E. Kocka sa dá podľa siete zostrojiť.
F. N a P sú na sieti na protiľahlých stenách, nikdy nebudú susedné. Kocka sa nedá zostrojiť.
G. R a P susedia svojimi vrchnými stranami. Kocka sa nedá zostrojiť.
H. O je inak orientované na sieti (s R susedí po šírke, nie po výške). Kocka sa nedá zostrojiť.

Príklad 3: (opravovala Lenka Gažová)

Každý zo 4 chlapcov má práve jednu zo štyroch záľub a býva na práve jednom poschodí. Žiadni dvaja chlapci nemajú rovnakú záľubu a nebývajú na rovnakom poschodí. Poschodia označíme od najnižšieho po najvyššie 1.,2.,3.,4. .

1. Kristián býva na 4. (najvyššom) poschodí, lebo:
   Julián je gitarista a nie šermiar, teda nebýva na 4.pochodí. (zo zadania)
   Rastislav nebýva na najvyššom 4.pochodí. (zo zadania)
   Matiáš nie je šermiar zo 4.poschodia. (zo zadania)
   A teda na 4.pochodí nebýva Julián, Rastislav ani Matiáš, teda býva tam Kristián.
2. Na koni rád jazdí Rastislav, lebo:
   Julián je gitarista. (zo zadania)
   Kristián je šermiar (z 1.).
   Rastislav nie je flautista. (zo zadania)
   A teda na koni nejazdí ani Julián, ani Kristián, ani Matiáš. Na koni jazdí Rastislav.

Príklad 4: (inšpirácia od Martina Štepanoviča) (opravovala Efka Rosíková)

Najjednoduchšia cesta k riešeniu je začať „od konca“ – teda od informácie, že *zákusok jedlo 24* ľudí (keďže po zákusku odišlo všetkých 24 ľudí). To sú 2/3 tých, čo jedli hlavné jedlo (pretože po hlavnom jedle odišla tretina hostí). Teda *hlavné jedlo muselo jesť* ešte o jednu tretinu ľudí viac, teda 24+12 = *36 hostí* (ak 2/3 sú 24, potom 1/3 je 24:2 = 12). Polievku jedlo o 5 ľudí menej (lebo po polievke odišlo o 5 ľudí menej ako prišlo, t.j. ku hlavnému jedlu pribudli piati). *Polievku* teda *jedlo* 36-5 = *31 hostí*. A nakoniec predjedlo jedlo o 10 ľudí menej než polievku (lebo medzi polievkou a predjedlom pribudli desiati), čiže 31-10 = 21. Výsledok: ***predjedlo jedlo 21 hostí.***

Príklad 5: (opravovala Dagmar Horáková)

Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi. Jeden z najjednoduchších:

1. Treba si uvedomiť, že máme 7 výrokov, z toho 5 má byť klamstiev a zvyšné dva pravdivé.
2. Keď si všimneme dvojice výrokov: 4. a 5. a dvojicu 6. a 7. zistíme, že tieto výroky si navzájom odporujú, teda nemôžu súčasne byť pravdivé (alebo súčasne nepravdivé) oba výroky z dvojice. Teda v dvojici 4. ,5. je určite jeden výrok pravdivý a druhý nepravdivý, podobne v dvojici 6., 7. V posledných štyroch výrokoch sú teda dva pravdivé (a dva nepravdivé), prvé tri výroky musia teda byť nepravdivé. Každý z bratov klamal, keď tvrdil, že sa žiadneho koláča nedotkol. Každý má na konte jeden koláč.
3. Výrok 6. nemôže byť pravdivý, lebo jedli všetci. Výrok 7. potom musí byť pravdivý. Ďalší koláč sa pripisuje Juliánovi.
4. Zostáva zistiť, ktorý z výrokov 4. a 5. je pravdivý. Výrok 4. (Kristián si vzal viac ako Julián) nemôže byť pravdivý, pretože Kristián mohol zjesť maximálne dva koláče (hovoril len dva krát), a Julián už na konte má

dva koláče isté. Teda výrok 4. je nepravdivý a Rastislavovi pripíšeme ďalší koláč. Nutne potom výrok 5 musí byť pravdivý.

Teda jediné správne riešenie je: Rastislav zjedol 2, Kristián zjedol 1 a Julián 2 koláče.

Príklad 6: (Doplnené riešenie Janky Michalíkovej, opravovala Kaťa Antoničová)

Označme si podmienku $a>b>c$ ako (*).

Rozložme číslo 1764 na prvočísla: 1764 = 2.2.3.3.7.7

Aby čísla a, b, c boli celé, musíme ich nejako „poskladať“ ako súčiny týchto šiestich čísel.

Ak vieme, že stuha má 114 cm, 20 cm použijeme na uzol a mašľu, ostáva nám 94 cm, ktorými obviažeme krabicu. Poďme si teraz porátať strany. Ak sa pozrieme na bonbonieru, vidíme, že stuha nám dvakrát „prejde“ po strane a, dvakrát po strane b, ale po strane c až štyrikrát (tu mnohí z vás urobili chybu...). Teda dostávame rovnicu $2a + 2b + 4c = 94$, čo po úprave vyzerá takto: $a + b + 2c = 47$ (**). Z tejto rovnice je vidieť, že jedno z čísel a, b bude určite nepárne. Z prvočíselného rozkladu čísla 1764 môžeme dostať nepárne čísla 3, 7, 9, a 21, všetky ostatné nepárne by už boli väčšie ako 47 (a to nemôžu). Poďme od najväčšieho.

Nech jedno z čísel a, b je 21, musí to byť a, pretože platí (*). Z rozkladu nám potom ešte ostáva jedna sedmička, ak ju dáme „do b“, tak b sa musí rovnať 14, aby platila (*). Potom $c = 6$ a po overení zistíme, že podmienka (**) platí. Ak sedmičku dáme „do c“, tak $c = 7$ (aby platila (*)) a dopočítame $b = 12$, overíme (**) a na svete je ďalšie riešenie.

Ak jedno z čísel má byť 3, 7 alebo 9, musí to byť b, aby platila (*).

Ak teda $b = 9$, tak c musí byť buď 6 alebo 2 (lebo (*)), ale po dopočítaní čísla a zistíme, že neplatí (**). Podobne si to môžete sami overiť aj pre $b = 7$ a $b = 3$.

Ešte nesmieme zabudnúť pripomenúť, že c nemôže byť 1, pretože by jedno z čísel a, b bolo väčšie ako 47, alebo by platilo $a = b$, čo nemôže kvôli (*).

Takže riešeniami sú dvojice 21, 14, 6 a 21, 12, 7.

Príklad 7: (opravoval Palyno Kováč)

Máme teda vypočítať, koľko je značiek tvaru MAT **-** takých, že súčet prvých dvoch a posledných dvoch cifier je rovnaký. Najprv sa pozrieme na to, aký tento súčet môže byť. Je zrejmé, že najmenší súčet bude vtedy, keď bude tvorený najmenšími číslami teda 00: 0+0=0. Najväčší bude vtedy, keď bude tvorený (pre zmenu) najväčšími číslami, teda 99: 9+9=18. Náš súčet bude podľa týchto poznatkov nadobúdať hodnoty od 0 po 18. Teraz si napíšeme (rozpíšeme, spíšeme) všetky spôsoby, ktorými môžeme ten ktorý súčet dostať:

Súčet	Možnosti	Počet možností
0	00	1
1	01 10	2
2	11 20 02	3
3	30 21 12 03	4
4	22 40 31 13 04	5
5	50 41 32 23 14 05	6
6	33 60 51 42 24 15 06	7
7	70 61 52 43 34 25 16 07	8
8	44 80 71 62 53 35 26 17 08	9
9	90 81 72 63 54 45 36 27 18 09	10
10	55 91 82 73 64 46 37 28 19	9
11	92 83 74 65 56 47 38 29	8
12	66 93 84 75 57 48 39	7
13	94 85 76 67 58 49	6
14	77 95 86 68 59	5
15	96 87 78 69	4
16	88 97 79	3
17	98 89	2
18	99	1

Teraz, keď už máme zistené, koľkými spôsobmi možno získať ten ktorý súčet, môžeme si všimnúť celé značky. Značka je tvaru MAT X-Y (X,Y sú dvojčíslia). Vieme, že súčet cifier X sa rovná súčtu cifier Y. Už vieme, koľkými spôsobmi možno urobiť ten súčet. Čiže nech súčet X môžeme dostať x spôsobmi. Keď ku každému spôsobu pripíšeme na druhú stranu ľubovolný z týchto x spôsobov, dostaneme platnú značku. S každým z x spôsobov teda získame x nových značiek. Pre každý spôsob týmto spôsobom dostaneme x.x=x2 značiek. Stačí nám spočítať druhé mocniny počtu spôsobov pre každý súčet od 0 po 18 a získame počet všetkých značiek, ktoré majú súčet takých značiek ako sme chceli.

Takže: $1^2+2^2+3^2+...+9^2+10^2+9^2+...+1^2$=1+4+9+...+81+100+81+...+1=670.

Príklad 8: (opravoval Jerry Kadubec)

Kružnica je určená troma bodmi, teda treba vybrať 3 body zo sto. Koľko rôznymi spôsobmi ich môžeme vybrať?

Prvý bod môžeme vybrať 100 spôsobmi (máme 100 bodov). Druhý bod (ku každému prvému) môžeme vybrať 99 spôsobmi (jeden zo 100 sme už vybrali). Tretí bod môžeme vybrať 98 spôsobmi. Takže trojice bodov môžeme vybrať 100.99.98 spôsobmi. **Ale** keď si 1., 2., 3. bod označíme v poradí A, B, C.

Tak vybratie trojíc ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA je rovnaké. Teda každú trojicu bodov sme tam započítali 6-krát. Správne riešenie je teda 100.99.98/6 = 161700.

Príklad 9: (opravoval Martin Hriňák)

Každé prirodzené číslo *n* môžeme jednoznačne zapísať v dvojkovej sústave, a to v tvare $n = a_k.2^k + a_{k-1}.2^{k-1} + ... + a_0.2^0$, kde čísla a_k, ..., a_0 sú 0 alebo 1. Ak chceme previesť číslo z desiatkovej sústavy do dvojkovej, používame na to nasledujúci algoritmus : Číslo vydelíme dvomi a zvyšok zapíšeme. Tento postup opakujeme, až kým nedostaneme na konci nulu. Potom zvyšky zapíšeme v opačnom poradí, ako sme ich dostali. Dostaneme tak zápis čísla v dvojkovej sústave. A čo sme robili s číslom v ľavom stĺpci ? Presne to isté! Riadky, v ktorých sme dostali párne čísla, zodpovedajú zvyškom 0 po delení dvomi (lebo párne čísla sú deliteľné dvomi). To ale znamená, že číslo vo svojom

dvojkovom zápise malo na danom mieste nulu. Preto sme tieto čísla škrtli. No a v pravom stĺpci sme zapisovali 2^0, 2^1, 2^2 , ..., 2^k –násobky druhého čísla. Nakoniec sme sčítali tie čísla v druhom stĺpci, ktoré zodpovedali jednotkám v dvojkovom zápise čísla v prvom stĺpci. Najlepšie bude, ak si to ukážeme na príklade:

1. číslo	2. číslo	zvyšok
45	18. 2^0	1 (lebo 45/2 dáva zvyšok 1)
~~22~~	~~18.~~ 2^1	0
11	18. 2^2	1
5	18. 2^3	1
~~2~~	~~18.~~ 2^4	0
1	1 18. 2^5	1
810	18.(2^0 + 0. 2^1 + 2^2 +2^3 +0. 2^4 +2^5) no a platí 45=2^0 + 0. 2^1 + 2^2 +2^3 +0. 2^4 +2^5 , teda sme ozaj dostali 18.45=810.	

Komentár.

Úloha bola trochu náročnejšia, preto bolo aj hodnotenie miernejšie (veď budú Vianoce ...). Za opísanie príkladu zo zadania, prípadne za prerozprávanie zadania, bolo 0b. Za vynásobenie niekoľkých čísel bolo 0,1b x počet násobení. Za spomenutie, že využijeme dvojkovú sústavu, som dával 2,5b. Ak ste uviedli aj nejaké príklady, ako to asi funguje, mohli ste získať ďalší bod. Zato, že ste skonštatovali, že ak vyškrtneme tie čísla, kde je prvé číslo párne, dostaneme to, čo treba, ste mohli získať ďalší bod (podľa zdôvodnenia). No a za úplné riešenia bolo 5 bodov. Tam som ešte strhával 0,1 až 0,3 bodu za drobné nepresnosti.

Niektorí z vás si všimli, že v zadaní nebolo napísané, že násobíme prirodzené čísla, a našli protipríklad. Za takéto riešenia sa však veľa bodov získať nedalo.

Príklad 10 : (opravoval Ondrej Bašták)

Súčet prvých sto párnych čísel je 2+4+6+…+200. Súčet prvých sto nepárnych čísel je 1+3+ 5+…+199. Súčet prvých sto párnych čísel prepíšeme do tvaru (1+1)+(3+1)+(5+1)+…+(199+1). Vidíme, že každý člen zo súčtu párnych čísel je o 1 väčší ako jemu prislúchajúci člen zo súčtu nepárnych čísel. Keď tieto dva rady odčítame člen po člene dostaneme rozdiel 1+1+…+1=100. Súčet prvých sto párnych čísel je o 100 väčší ako súčet prvých sto nepárnych čísel.

Príklad 11: (opravovala Alenka Kovárová)

Pre jednoduchší zápis, nech a=25cm, b=12cm, c=6,5cm. Potom tehly môžeme na seba stavať 27-mimi spôsobmi, z nich niektoré sa rovnajú, lebo *ak tehlám vymením len poradie, výška ostane nezmenená* (ak niekto nenapísal túto dôležitú vetu a mal rovnaké riešenie ako ja, tak mal o 0,5 bodu menej). Teda môže nastať len 10 rôznych možností: 1. aaa=75cm, 2. aab=aba=baa=62cm, 3. aac=aca=caa=56,5cm, 4. abb=bab=bba=49cm, 5. abc=acb=bac=bca=cab=cba=43,5cm, 6. acc=cac=caa=38cm 7. bbb=36cm, 8. bbc=bcb=cbb=30,5cm, 9. bcc=cbc=ccb=25cm, 10. ccc=19,5cm.

Bodovanie: bez postupu -2b (nedostatočný postup –1b), za každé chýbajúce riešenie –0,5b

Príklad 12: (opravoval Charon μ - Lukáš Medlen)

Zoberem nejaký počet kociek a zložím z nich štvorcovú vrstvu. Vrstvu rozoberem a zložím z tých istých kociek veľkú kocku.

Ak sa dá z nejakého počtu malých kociek poskladať štorcová vrstva (plocha) aj kocka, musí platiť, že:

$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^3=\boldsymbol{n}$, kde $\boldsymbol{a}$ je veľkosť strany štvorcovej vrstvy (v malých kockách), $\boldsymbol{b}$ je veľkosť hrany veľkej kocky. $\boldsymbol{a}^2$ je povrch štvorcovej vrstvy (počet kociek v nej), lebo obsah štvorca sa počíta ako druhá mocnina veľkosti jeho strany, $\boldsymbol{b}^3$ je objem veľkej kocky (počet kociek v nej), lebo objem kocky sa počíta ako tretia mocnina veľkosti jej hrany. $\boldsymbol{n}$ je počet kociek, ktoré sme na stavbu použili. Všetky tieto spomínané čísla sú celé - kocky nebudem rezať, ani inak deliť... Ak je teda nejaké číslo ($\boldsymbol{n}$) druhou aj treťou mocninou nejakých celých čísel, dá sa napísať aj ako šiesta mocnina nejakého iného celého čísla (napr. $\boldsymbol{c}$). Preto šiesta, lebo 6 je najmenší spoločný násobok čísel 2 a 3. ($\boldsymbol{n}=\boldsymbol{c}^6$) čím menšie číslo za $\boldsymbol{c}$ dosadím, tým menšie bude hľadané $\boldsymbol{n}$, a my predsa chceme nájsť čo najmenšie $\boldsymbol{n}$. 1 nedosadím, lebo $\boldsymbol{n}>1$ (podľa zadania), tak dosadím 2: $2^6=64$, teda najmenšie $\boldsymbol{n}=64$.

Príklad sa dal riešiť aj nájdením (skúšaním mocnín, hľadaním v tabuľkách, ...) najmenšieho čísla, ktoré je aj druhou aj treťou mocninou nejakých celých čísel.

bodovanie: 1b: nájdenie vzťahu $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^3=\boldsymbol{n}$ 1b: vysvetlenie, čo znamená a, b, n, a^2, b^3 a prečo sa $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^3=\boldsymbol{n}$ rovná, 1b: nájdenie vzťahu $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{c}^6$, 1b: vysvetlenie vzťahu $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{c}^6$ a prečo akurát 6.-mocnina, 0.5b: nájdenie nejakého $\boldsymbol{n}$, 0.5b: nájdenie najmenšieho $\boldsymbol{n}$ a vysvetlenie, prečo je najmenšie

ak to niekto riešil tým druhým spôsobom, bodoval som takto:

1b: vypísanie druhých mocnín 1,2,3,4... (resp. druhých odmocnín tretích mocnín), 1b: vysvetlenie, čo znamenajú tie čísla, 1b: vypísanie tretích mocnín čísel 1,2,3,4... (resp. tretích odmocnín druhých mocnín), 1b: vysvetlenie, čo znamenajú tie čísla, 0.5b: nájdenie nejakého *n*, 0.5b: nájdenie najmenšieho *n* a vysvetlenie, prečo je najmenšie