Celoslovenský korešpondenčný seminár z matematiky pre žiakov ZŠ a OG

PIKOMAT

30. ročník www.pikomat.sk školský rok 2012/2013

Vzorové riešenia 3. série zimnej časti, kategória 7–9

Úloha S1: Zraz na hore. *Opravovala Dominika Iždinská.*

Aby sme nemuseli neustále vypisovať zbytočne dlhé vety, použijeme takéto označenia:

- ak niekto zatiaľ absolvoval párny počet podaní rúk, budeme hovoriť, že ten človek „**je párny**“
- ak niekto zatiaľ absolvoval nepárny počet podaní rúk, budeme hovoriť, že ten človek „**je nepárny**“.

V tejto úlohe potrebujeme ukázať, že počet párnych ľudí je vždy nepárny.

Na začiatku je to jasné. Na hore sa zišlo 15 ľudí a kým si ešte nikto nepodal ruku, každý mal samozrejme za sebou NULA podaní rúk. Nulu (podľa zadania) považujeme za párne číslo, a teda na začiatku boli všetci 15-ti ľudia párni. 15 je nepárny počet, takže to vyhovuje zadaniu. Skvelé.

Akonáhle si prvá dvojica podala ruky, obaja zrazu mali za sebou 1 podanie rúk, takže sa stali nepárnymi. Zrazu máme 2 nepárnych a 13 párnych ľudí. Aj 13 je nepárny počet, takže aj to ešte stále vyhovuje zadaniu. Skvelé.

Ďalej síce nevieme povedať, kto presne si s kým podal ruky, ale to nevadí, pretože mohli nastať iba tieto 3 prípady:

1) ruky si podali nejakí dvaja párni
2) ruky si podali nejakí dvaja nepárni
3) ruky si podali párny s nepárnym.

Teraz si treba uvedomiť ešte jednu jednoduchú vec: vždy, keď si niekto podá ruku, jeho stav sa zmení (ak bol ten človek párny, stane sa nepárnym, a naopak). Prečo? Jednoducho preto, lebo jeho počet podaní rúk sa zvýši o 1.

Takže v prvom prípade sa z dvoch párnych ľudí stanú dvaja nepárni, teda POČET párnych ľudí sa zníži o 2 – parita ostáva zachovaná. V druhom prípade sa z dvoch nepárnych ľudí stanú dvaja párni, teda POČET párnych ľudí sa zvýši o 2 – parita ostáva zachovaná. V treťom prípade sa tí dvaja iba „vymenia“, z párneho sa stane nepárny a z nepárneho sa stane párny, takže POČET párnych ľudí ostane nezmenený.

Ukázali sme, že celkom na začiatku je počet párnych ľudí nepárny a tiež že tento stav žiadne podanie rúk nezmení. Takže po skončení zoznamovania určite počet ľudí s párnym počtom podaní rúk zostane nepárny.

Bodovanie:

úplný dôkaz – 5b.; neúplné alebo nesprávne pochopené riešenie – max 3b.; max 1b. som strhávala, ak ste nespomenuli jednu z možností.

Poznámka:

Mnohí z vás zadanie pochopili inak, ako bolo myslené. Na vrcholku hory sa zišlo **15 ľudí**, teda vždy uvažujeme o 15 ľuďoch. Tí, ktorí si nepodali ruky vôbec s nikým, **majú 0 podaní rúk** a zadanie hovorí, že nulu považujeme za párne číslo, takže títo ľudia majú párny počet podaní rúk.

Ďalej to, že si **niektoré** dvojice medzi sebou podali ruky, znamená, že my NEVIEME, ktoré dvojice a koľkokrát. Preto musíme ukázať, že tvrdenie zo zadania platí úplne VŽDY, nech by si podával ruky ktokoľvek. Takže napríklad dokázať to len pre prípad, keď si podali ruky navzájom všetci, nestačí. Každý človek si predsa mohol v súlade so zadaním podať ruku s ľubovoľným počtom ľudí, napríklad ak si človek A podal ruku s človekom B, nemusel si podať aj s C atď.

Úloha S2: Levanduľová hora. *Opravoval Peter „Comp“ Ambrož.*

Najprv si zhrňme najdôležitejšie údaje zo zadania, vlastne sú to len tri informácie:

1) Výška Levanduľovej hory má všetky cifry rovnaké.
2) Výška Smradľavej hory je 4-ciferná.
3) Smradľavá hora + Levanduľová hora = odzadu zapísaná Smradľavá hora.

Poďme tieto výšky trochu podrobnejšie preskúmať. Smradľavú horu zapíšeme rovno ako ABCD, pretože vieme, že má presne 4 cifry. Odzadu zapísaná Smradľavá hora bude tým pádom DCBA. Levanduľovú horu zatiaľ zapíšeme iba ako ***x***, pretože ešte nevieme, koľko má cifier (pamätáme si ale, že všetky sú rovnaké!). No a hlavne musí platiť, že **ABCD + *x* = DCBA**.

Keďže to, čo sa snažíme nájsť, je ***x***, prepíšeme si to takto: ***x* = DCBA – ABCD**. Takže hľadaná výška Levanduľovej hory je rozdiel medzi Smradľavou horou a jej opačným zápisom. A opäť pripomínam: hľadaná výška má všetky cifry rovnaké!

Tak sa teda pozrime, aké rozdiely sa vôbec môžu objaviť na pravej strane rovnice. (Potom si z nich vyberieme tie, ktoré majú všetky cifry rovnaké.) Pomôže nám to, že cifry A, B, C, D sa opakujú, iba v opačnom poradí. Všimneme si, že cifry A a D sa objavujú iba na miestach jednotiek a tisícok, cifry B a C sa objavujú iba na miestach desiatok a stoviek. Keď si obe čísla rozpíšeme na tisícky, stovky, desiatky a jednotky, dostávame:

$$\mathrm{ABCD} = 1000\cdot A + 100\cdot B + 10\cdot C + 1\cdot D$$
$$\mathrm{DCBA} = 1000\cdot D + 100\cdot C + 10\cdot B + 1\cdot A$$

Takže hľadaný rozdiel DCBA – ABCD bude vyzerať takto: DCBA – ABCD = 999·D + 90·C – 90·B – 999·A. Pri A a D sa nám opakuje číslo 999, pri B a C sa nám opakuje číslo 90. To si vieme pekne zhrnúť takto:

$$\mathrm{DCBA} - \mathrm{ABCD} = \mathbf{999\cdot(D - A) + 90\cdot(C - B)}.$$

To už je veľmi zaujímavý výsledok. Vidíme, že naša hľadaná výška ***x*** musí byť súčtom niekoľkých 999-tok a niekoľkých 90-tok. Otázkou teraz je, ako z čísel 999 a 90 „poskladať“ súčet, ktorý bude mať všetky cifry rovnaké. Ako prvá hneď udrie do očí možnosť zobrať iba jednu 999-ku a žiadnu 90-ku. Na to stačí, aby bolo (D – A) = 1 a aby bolo (C – B) = 0. Možností, ako to dosiahnuť, je veľa (napríklad D=5, A=4, B=8, C=8), ale to nás až tak nezaujíma, pretože na výšku Smradľavej hory sa zadanie nepýta. Našli sme jedno riešenie: **Levanduľová hora môže mať výšku 999!**

Môže mať aj inú výšku? Čiže: dá sa z čísel 999 a 90 „poskladať“ aj iný súčet, ktorý bude mať všetky cifry rovnaké? Možností nie je veľa. Nižšia ako 999 byť nemôže, pretože v takom prípade by sme nemohli použiť 999-ku. To je problém, lebo iba pomocou 90-ky bude posledná cifra vždy 0, a teda nikdy nebude rovnaká ako ostatné. Väčšie ako 999 pripadajú do úvahy iba 1111, 2222, 3333, ..., 8888. Ďalej už nemusíme uvažovať, pretože 9999 alebo čokoľvek väčšie by po pričítaní k 4-cifernej Smradľavej hore vytvorilo viac ako 4-ciferné číslo.

Overiť týchto 8 možností sa dalo mnohými viac alebo menej komplikovanými spôsobmi (a mnohí ste to zvládli), no tu si ukážeme elegantnejší spôsob. Keďže, ako už vieme, výška Levaduľovej hory musí byť súčtom 999-tok a 90-tok, znamená to tiež, že musí byť deliteľná 9-timi. Veľmi ľahko si overíme, že žiadna z ôsmich možností 1111, 2222, ... až po 8888 nie je deliteľná 9-timi. A to je koniec, niet ďalších možností na preskúmanie.

Levanduľová hora má výšku 999.

Bodovanie:

správny výsledok – 1b; k tomu podľa kvality postupu:
iba skúšanie niekoľkých možností a náznak nejakých úvah – 0,5 až 1b.; preskúmanie niektorých možností pre počet cifier – 2b.; ucelený pohľad na to, aké výšky prichádzajú do úvahy, ale nedotiahnutie postupu – 3b.; body za postup, kde je jasné, že 999 je jediné riešenie a iných niet – 4b.

Úloha S3: Úloha pre banditu. *Opravoval Petra „Peťa“ Vlachynská.*

Banditi dostali za úlohu nájsť tri najmenšie možné počty kocočiek, z ktorých sa dá zostaviť štvorec aj kocka. Na postavenie štvorca so stranou dĺžky a potrebujeme $(a \cdot a)$ kocočiek, na postavenie kocky s hranou dĺžky b potrebujeme $(b \cdot b \cdot b)$ kocočiek. Keďže počty kocočiek majú byť v oboch prípadoch rovnaké, musí platiť, že $(a \cdot a) = (b \cdot b \cdot b)$. Hľadáme teda také počty, ktoré sú výsledkom vynásobenia **troch** rovnakých čísel a zároveň výsledkom vynásobenia iných **dvoch** rovnakých čísel.

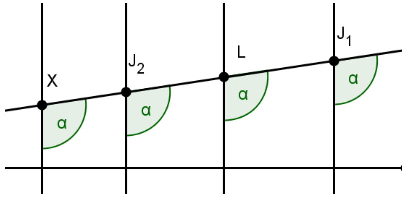
Skrátka potrebujeme taký súčin troch rovnakých čísel $(b \cdot b \cdot b)$, ktorý sa bude dať prepísať na súčin dvoch rovnakých čísel $(a \cdot a)$. To sa dá jediným spôsobom, a to tak, že každé b „roztrhneme“ na súčin dvoch rovnakých čísel, čiže b zapíšeme ako $\boldsymbol{b = x \cdot x}$. Potom a bude $\boldsymbol{a = x \cdot x \cdot x}$. Takže vidíme, že celý súčin sa musí dať zapísať ako súčin šiestich rovnakých čísel $(x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^6$. Potom už nech je x akékoľvek, vždy vieme spraviť štvorec $(x \cdot x \cdot x) \times (x \cdot x \cdot x)$ a tiež kocku $(x \cdot x) \times (x \cdot x) \times (x \cdot x)$.

Tým je úloha v podstate vyriešená. Keď chceme nájsť 3 najmenšie môžné riešenia, treba už iba za x dosadiť 3 najmenšie možné čísla. Keďže číslo 1 máme v zadaní zakázané, budú to čísla 2, 3, 4. Tým pádom troma najmenšími riešeniami úlohy sú čísla 2^6, 3^6 a 4^6, teda **64, 729 a 4096**. Možno si jednoducho overiť, že dĺžky strán štvorcov potom budú **8, 27 a 64 kocočiek** a dĺžky hrán kociek budú **4, 9 a 16 kocočiek**.

Bodovanie:

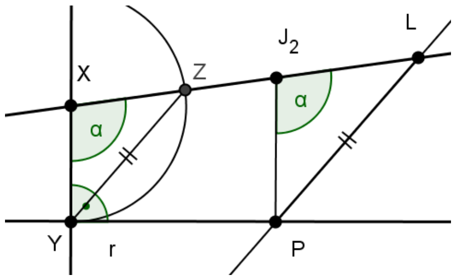
správny výsledok – 2 b.; myšlienka, že hľadáme čísla, ktoré sú druhá a tretia mocnina zároveň – 1b.; správnosť a úplnosť zvyšného postupu – 2b.

Úloha S4: Banditi pri rieke. *Opravoval Martin „Panda“ Svetlík.*



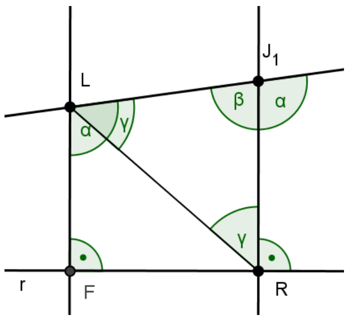
Ukážeme si dva najčastejšie spôsoby, ako ste túto úlohu riešili. Oba spôsoby v podstate využívajú tú istú myšlienku, že keď pretnem tú istú priamku (napríklad priamku *SL*) viacerými rovnobežkami (napríklad kolmicami na rieku *r*, ktoré prechádzajú cez body *L*, J_1, J_2, ale aj cez ľubovoľný bod *X*), vzniknú nám rovnaké uhly (mimochodom, volá sa to *súhlasné uhly)*.

Prvý spôsob: Keďže vieme, že bod J_2 je rovnako ďaleko od bodu *L* ako od rieky (teda od bodu *P*), je jasné, že trojuholník PLJ_2 je rovnoramenný. Nevieme však, kde presne sú body J_2 ani *P*. Môžme si ale narysovať podobný rovnoramenný trojuholník, ktorý bude mať dva body na priamke *SL* a tretí na priamke *r*. A to takto:



- Zvolíme si ľubovoľný bod *X* na priamke *SL* a spravíme kolmicu na priamku *r*, ktorá prechádza bodom *X*.
- Priesečník tejto kolmice s priamkou *r* označíme *Y* a spravíme kružnicu so stredom *X* a polomerom $|XY|$.
- Tam, kde sa táto kružnica pretne s priamku *SL*, bude bod *Z*.
- Teraz máme trojuholník *XYZ*, ktorý má všetky uhly presne ako náš hľadaný trojuholník PLJ_2, aj je rovnako otočený, iba je trochu inde.
- Spravíme rovnobežku s *YZ* cez bod *L*. Tam, kde sa pretne s riekou *r*, dostaneme bod *P*.
- Spravíme kolmicu na *r* cez *P* a tam, kde sa pretne s priamkou *SL*, je bod J_2.

Týmto spôsobom by sme vedeli nájsť aj bod J_1 (môžeš si to vyskúšať), ale keďže som sľúbil, že ukážem dva rôzne postupy, tak na nájdenie bodu J_1 použijeme ten druhý.



Druhý spôsob: Označíme si na obrázku zopár uhlov. Tak, ako sme si ukázali na začiatku, uhly pri vrcholoch *L* a J_1 sú rovnaké, označme ich α. Uhol LJ_1R označíme β, a zvyšené dva uhly v trojuholníku označíme γ (keďže je rovnoramenný, tieto dva uhly sú rovnaké. Je jasné, že $\alpha+\beta = 180°$, takže $\beta = 180° - \alpha$. Keďže súčet uhlov v trojuholníku je 180°, vieme si vyjadriť aj uhol γ, a to takto:

$$\gamma = \frac{180° - \beta}{2} = \frac{180° - (180° - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Takže na to, aby sme získali uhol γ, nám stačí rozdeliť uhol α na polovicu. A na to použijeme os uhla. Takže postup bude asi takýto:

- Narysujeme kolmicu na rieku *r*, ktorá prechádza bodom *L*.
- Spravíme os uhla, ktorý zviera táto kolmica s priamkou *SL*.
- Tam, kde sa táto os pretne s priamkou *r*, je bod *R*.

- Spravíme kolmicu na r v bode R, a kde sa táto pretne s SL, je hľadaný bod J_1.

Opäť keby sme robili osi oboch uhlov, čo zvierajú priamky FL a SL (aj toho väčšieho aj toho menšieho), preťali by sa s riekou v bodoch P, R, a „nad nimi" by sme získali oba body J_1, J_2.

Bodovanie:
postup konštrukcie – 3b.; dôkaz, že funguje – 2b.

Úloha S5: Pony Express. *Opravoval Pavol „Tamarka" Hronský.*

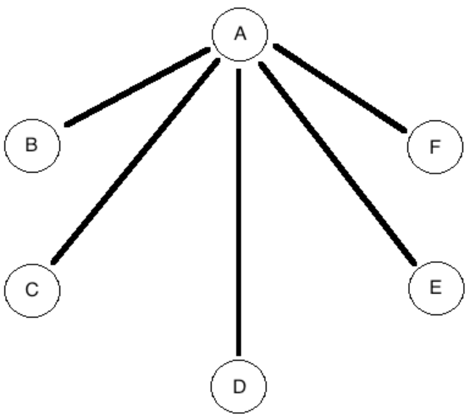
Mnohí z vás mali ťažkosti so správnym pochopením zadania. *V okolí Redmontonu bolo 6 miest. Poštové spojenie medzi nimi zabezpečovali dve spoločnosti.* Väčšina z vás správne pochopila, že spoločnosti prevážali poštu len medzi tými šiestimi mestami a nie aj medzi Redmontom. Teda keď si nakreslíme mapku, mala by mať len 6 bodov a 15 cestičiek, nie 7 bodov a 21 cestičiek. *Medzi každými dvoma mestami zabezpečovala poštové spojenie práve jedna spoločnosť.* Aj tu pozor: spoločnosti neovládajú celé mestá, ako si niektorí z vás mysleli, ale len konkrétne cestičky medzi mestami. Čiže ak spoločnosť WF prepravuje medzi mestami A a B, tak spoločnosť PE medzi nemôže prepravovať medzi mestami A a B, ale bez problémov môže napríklad medzi A a C. No a úlohou je ukázať, že nech si spoločnosti akokoľvek podelia cestičky medzi mestami, tak v každej z týchto možností (mimochodom tých možností je 32768) sa určite stane, že aspoň jedna spoločnosť vytvorí medzi tromi mestami uzavretý okruh (trojuholník).

Keď sme porozumeli zadaniu, môžeme sa vrhnúť na riešenie. Vyskúšať všetkých 32768 možností je zjavne priveľa (aj keď sa niektorí o tento postup pokúšali, väčšinou sa im nepodarilo načrtnúť ani polovicu možností). Preto sa na to pozrieme úplne z opačnej strany: budeme sa snažiť ukázať, že takýto trojuholník sa NEDÁ zostrojiť. Keď pri tom narazíme na niečo nepravdivé alebo nemožné, bude to znamenať, že takýto trojuholník MUSÍ existovať.

Keďže každé mesto je spojené s každým, musí z každého viesť práve 5 cestičiek. Sú iba 3 možnosti, ako si spoločnosti môžu tieto cestičky rozdeliť: buď má všetkých 5 cestičiek jedna spoločnosť a druhá nič (5+0), alebo má jedna spoločnosť 4 cestičky a druhá jednu (4+1), alebo má jedna spoločnosť 3 a druhá 2 cestičky (3+2). Ďalšie možnosti (ako napr. 2+3) už pre nás nie sú zaujímavé, pretože by sa iba opakovalo to isté, akurát s opačnými spoločnosťami. Poďme rozobrať všetky možnosti.

1. možnosť: 5 + 0

Pre lepšiu ilustráciu si nakreslíme obrázok. Z mestečka vedie 5 ciest ovládaných jedinou spoločnosťou.

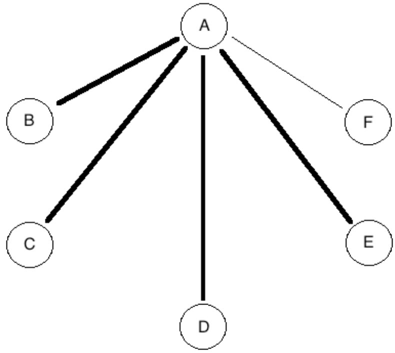


Obr. 1

Avšak ak by sme ktorékoľvek ďalšie dve mestá spojili tou istou spoločnosťou, vznikol by trojuholník. Tomu sa pokúsime vyhnúť tak, že všetky ostatné spojenia spravíme druhou spoločnosťou. Z toho je už ale jasné, že vytvoríme hneď niekoľko trojuholníkov (napr. CDE alebo BEF atď. atď.).

2. možnosť: 4 + 1

Z jedného mestečka vedú 4 cestičky ovládané jednou spoločnosťou. Keď sa pozrieme na tie 4 mestá, ktoré sú takto napojené (na Obr. 2 mestá B, C, D, E), vidíe, že je to veľmi podobný prípad, ako v predchádzajúcej možnosti. Na prepojenia medzi nimi už nemôžeme použiť tú istú spoločnosť, lebo by vznikol trojuholník cez mesto A. Ak ale použijeme na všetky ich prepojenia druhú spoločnosť, vznikne hneď niekoľko trojuholníkov, ako napríklad CDE, BCE a pod.

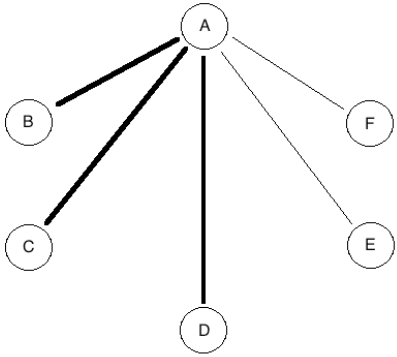


Obr. 2

3. možnosť: 3 + 2

Na Obr. 3 opäť vidno to, čo už poznáme: ak z mesta A vedú do B, C aj D cesty tej istej spoločnosti, potom na spojenia medzi B, C a D už túto spoločnosť nemôžeme použiť. Keď ale použijeme druhú spoločnosť, vznikne trojuholník BCD.

Takže nech sme sa akokoľvek snažili, zabrániť vzniku trojuholníkov sa nám nepodarilo. Preto môžeme spokojne prehlásiť, že pri ľubovoľnom rozdelení cestičiek medzi spoločnosti musí vždy vzniknúť aspoň jeden trojuholník ciest jednej a tejistej spoločnosti.



Obr. 3

Bodovanie:

čiastočné pochopenie úlohy s aspoň nejakým príkladom, ako vytvoriť trojicu – max 1,5b.;
správne pochopenie príkladu, avšak slabšie odôvodnenie výsledku – max 3,5b.;
za drobné nedostatky a logicky nesprávne úvahy v závere som strhával 0,5b.

p-mat

organizátor korešpondenčného seminára Pikomat

APVV

Pikomat je podporovaný Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy číslo LPP-0375-09